Kategorie mladší

Úloha 1A (5 bodů):
Jak už to v životě chodí, klíčová informace se skrývá až na konci: Na největším listu chtějí mít 20 a 30gramovou ozdobu. Toho mohou dosáhnout dvěma způsoby. Buď pověsí 30gramovou na konec listu a 20gramovou doprostřed, nebo naopak. V prvním případě by zatížení prvního listu bylo $z_1 = 30 \cdot 2 + 20 \cdot 1 = 80$, což by ale znamenalo, že druhý (nejkratší) list nedokáží dostatečně zatížit. I když na něj pověsí dvě 50gramové ozdobičky, jeho zatížení bude $z_2 = 50 \cdot 1 + 50 \cdot 0,5 = 75$, tedy méně než 80. Z toho vyplývá, že na konci prvního listu musí viset ozdoba vážící 20 gramů, uprostřed 30 a jeho zatížení bude $z_1 = 20 \cdot 2 + 30 \cdot 1 = 70$. Zatížení ostatních listů musí být stejné. Jediná možnost, jak ozdobit druhý list, je na jeho konec pověsit 50gramovou ozdobičku a doprostřed 40gramovou: $z_1 = 50 \cdot 1 + 40 \cdot 0,5 = 70$. Tím jsme zcela vypotřebovali první sadu a nyní už není těžké uhodnout, jak budou ozdobičky rozvěšeny. První list: 20 na konci, 30 uprostřed, druhý list: 50 na konci, 40 uprostřed, třetí list: 30 na konci, 50 uprostřed a čtvrtý list: 20 na konci, 40 uprostřed.

Úloha 2A (6 bodů):
V chovatelském obchodě může Pauli koupit jen tyto orbitaly: 1s, 2s, 3s, 4s, 2p, 3p, 4p, 3d, 4d, 4f. Při stavbě hnízda se mohou pod sebe věšet jen v přesně daném pořadí, takže než Pauli začal brouky chovat, musel pro každý orbital spočítat součet kvalita + (počet krabiček-1)/2 a podle něho je seřadit:
1s: $1 + (1 - 1)/2 = 1$
2s: $2 + (1 - 1)/2 = 2$
3s: $3 + (1 - 1)/2 = 3$
4s: $4 + (1 - 1)/2 = 4$
2p: $2 + (3 - 1)/2 = 3$
3p: $3 + (3 - 1)/2 = 4$
4p: $4 + (3 - 1)/2 = 5$
3d: $3 + (5 - 1)/2 = 5$
4d: $4 + (5 - 1)/2 = 6$
4f: $4 + (7 - 1)/2 = 7$
Orbitaly jdou za sebou takto: 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, 4d, 4f. Nyní už snadno odpovíme na první otázku. Hnízdo Neon má zaplněné orbitaly 1s, 2s a 2p, takže jej obývá $1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10$ brouků. Pauli jich ale vyčenichal jen 8 a chtěl by spojit síly s jedním nebo několika svými kamarády a i tak nějaké vzácné místo postavit. Už víme, že v hnízdu Neon bydlí 10 brouků. Argon má zaplněné všechny orbitaly až po 3p (1s, 2s, 2p, 3s, 3p), takže v něm žije $1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 18$ brouků a Krypton (1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p) obývá $1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 36$ brouků. Enrico se může pochlubit hnízdem Argon, takže vlastní $E = 18$ brouků, Werner má $W = \text{Neon} + 4 = 10 + 4 = 14$ brouků, Niels chová $N = 22$ brouků a Luis $L = 6$. Nezbývá než si vypsat všechny možné kombinace a tučně vyznačit takové, které odpovídají vzácnému hnízdu (písmeno P označuje počet Pauliho brouků):
$P + E = 8 + 18 = 26$
$P + W = 8 + 14 = 22$
$P + N = 8 + 22 = 30$
$P + L = 8 + 6 = 14$
$P + E + W = 8 + 18 + 14 = 40$
$P + E + N = 8 + 18 + 22 = 48$
$P + E + L = 8 + 18 + 6 = 32$
$P + W + N = 8 + 14 + 22 = 44$
$P + W + L = 8 + 14 + 6 = 28$
$\mathbf{P + N + L = 8 + 22 + 6 = 36}$
$P + E + W + N = 8 + 18 + 14 + 22 = 62$
$P + E + W + L = 8 + 18 + 14 + 6 = 46$
$P + E + N + L = 8 + 18 + 22 + 6 = 54$
$P + W + N + L = 8 + 14 + 22 + 6 = 50$
$P + E + W + N + L = 8 + 18 + 14 + 22 + 6 = 68$
Chce-li Pauli vybudovat vzácné hnízdo, měl by spojit síly s Nielsem a Luisem.

Úloha 3A (7 bodů):
Přepišme si nejprve postřehy jednotlivých berušek do přehlednější podoby:

1. Berušky se jmenují Klárka, Anča, Domča, Bětka a Sylva.
2. Součet teček je dělitelný pěti.
3. Každá beruška má alespoň jednu tečku a nejvíce 11.
4. Berušky mají různý počet puntíků.
5. Klárka má o jednu tečku méně než Domča.
6. Anča má o šest teček více než beruška s nejmenším počtem flíčků (mimo Domču).
7. Anča má ze všech berušek (mimo Bětku) nejvíce teček.
8. Bětka má o čtyři tečky více než Sylva.
9. Součet teček na krovkách všech berušek kromě Anči je 17.
10. Součet teček na krovkách všech berušek kromě Bětky je 19.

Anča na svých kolegyních dohromady napočítala 17 teček (pozorování (9)). Protože na svých krovkách má alespoň jednu a nejvýše 11 flíčků (pozorování (3)), je součet teček všech berušek číslo mezi 18 a 28. Z postřehu (2) však víme, že je dělitelný pěti, takže v úvahu přichází jen 20 a 25. V pozorování (6) se dále tvrdí, že Anča má o šest teček více než některá z jejích kolegyň. Pokud by všechny berušky dohromady měly 20 teček, musela by Anča mít 3 a některá z jejích kamarádek -3, což je nesmysl. Celkový počet teček je tedy 25. Protože Anča vidí 17 teček, musí jich sama mít na krovkách $25 - 17 = 8$. Bětka jich vidí 19 (pozorování (10)), takže sama jich musí mít $25 - 19 = 6$. Dále víme, že Sylva má o čtyři tečky méně než Bětka (pozorování (8)), takže se může pochlubit $6 - 4 = 2$ tečkami.
Zbývají Klárka a Domča, na které zbývá $25 - 8 - 6 - 2 = 9$ teček. K přesnému určení nám dopomůže pozorování (5): Klárka má o jednu tečku méně než Domča. Klárka musí mít 4 a Domča 5. Odpověď na první otázku je Klárka 4, Anča 8, Domča 5, Bětka 6 a Sylva 2. Nově příchozí beruška Hanka musí mít 5 nebo 10 teček. Celkový počet teček zůstane dělitelný pěti a zároveň je splněna podmínka o alespoň jedné a nejvýše 11 tečkách.

Úloha 4A (9 bodů):
Začneme rozdělením čísla 3,141 na celou a desetinnou část:

$$3,141 = 3 + 0,141 = 3 + \frac{141}{1000}. \tag{1}$$

V čitateli zlomku bychom si přáli mít jedničku, čehož dosáhneme vydělením čitatele i jmenovatele číslem 141 (hodnota zlomku se nezmění, takže si to můžeme dovolit):

$$3,141 = 3 + \frac{141}{1000} = 3 + \frac{1}{\frac{1000}{141}}. \tag{2}$$

Zlomek $\frac{1000}{141}$ můžeme snadno převést na složené číslo $\frac{1000}{141} = 7 + \frac{13}{141}$ a po dosazení tedy platí

$$3,141 = 3 + \frac{1}{\frac{1000}{141}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{13}{141}}. \tag{3}$$

Na místě 13 bychom si opět přáli mít jedničku, opět tedy čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{13}{141}$ vydělíme 13:

$$3,141 = 3 + \frac{1}{7 + \frac{13}{141}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\frac{141}{13}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{10 + \frac{11}{13}}}. \tag{4}$$

A podobně pokračujeme dál: vezmeme vždy zlomek, který je „nejvíce vpravo dole“ a podíváme se, zda má v čitateli jedničku. Pokud ano, jsme hotovi, pokud ne, zkrátíme jej číslem v čitateli, výsledek převedeme na složené číslo a tak pořád dokola:

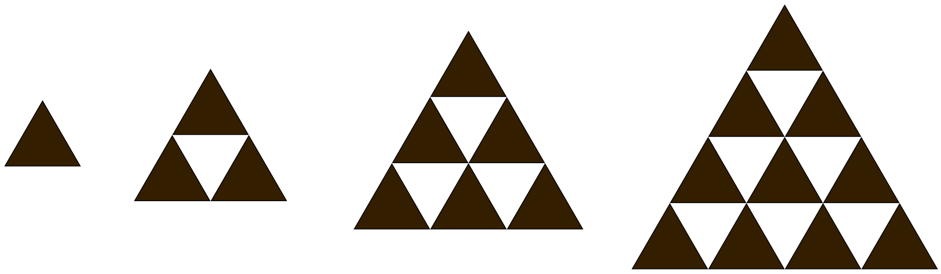
$$3,141 = 3+\frac{1}{7+\frac{1}{10+\frac{11}{13}}} = 3+\frac{1}{7+\frac{1}{10+\frac{1}{\frac{13}{11}}}} = 3+\frac{1}{7+\frac{1}{10+\frac{1}{1+\frac{2}{11}}}} = 3+\frac{1}{7+\frac{1}{10+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{11}{2}}}}} = 3+\frac{1}{7+\frac{1}{10+\frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}}}}. \tag{5}$$

A tím je příklad hotov.

Úloha 5A (5 bodů):
Nejprve spočítáme, kolik mg účinné látky musí Míša přijmout. Vyléčen je ve chvíli, kdy je obsah léčivé látky v těle alespoň 3 mg na každý kilogram váhy. Míša váží 500 kg, musí tedy přijmout $500 \cdot 3 = 1500$ mg účinné látky. Bude-li každých 8 hodin brát 6 tabletek, za jednu hodinu v průměru přijme $6 \cdot 10/8 = 7,5$ mg účinné látky. Ta však z těla průběžně ubývá rychlostí $0,5$ mg za hodinu. Ve výsledku Míša v průměru přijme za hodinu $7,5 - 0,5 = 7$ mg účinné látky a teoreticky bude vyléčen za $1500/7 = 214,3$ hodin. Jenže co toto číslo znamená? Míša nebere léky každou hodinu, ale každých 8 hodin, takže smysluplnější je spočítat, kolikrát si musí vzít léky. Po vydělení osmi dostaneme $214,3/8 = 26,8 \rightarrow 27$ dávek, avšak ani teď nejsme hotovi. V našem výpočtu odečítáme za každých 8 hodin $0,5 \cdot 8 = 4$ mg účinné látky. Míša je však vyléčen v okamžiku spolknutí poslední dávky léku, takže odečíst ony 4 mg i za poslední osmihodinovku je chyba. Ve výsledku to může znamenat, že Míšovi stačí o jednu dávku méně, než se zdá. Nezbývá než provést zkoušku. S každou dávkou Míša přijme $6 \cdot 10 = 60$ mg účinné látky a během příslušných osmi hodin ztratí $0,5 \cdot 8 = 4$ mg. Po 27 dávkách bude mít v těle $27 \cdot (60 - 4) + 4 = 1516$ mg, zatímco po 26 dávkách to bude $26 \cdot (60 - 4) + 4 = 1460$ mg.
Bude-li Míša brát léky každých devět hodin namísto osmi, potrvá léčení déle. Za jednu hodinu v průměru přijme $6 \cdot 10/9 - 0,5 = 6,17$ mg, léčba teoreticky potrvá $1500/6,17 = 243,2$ hodin, což znamená $243,2/9 = 27,03 \rightarrow 28$ dávek. Podobně jako v předchozím případě raději vyřkneme konečný ortel až po zkoušce. S každou dávkou Míša přijme $6 \cdot 10 = 60$ mg účinné látky a během příslušných devíti hodin ztratí $0,5 \cdot 9 = 4,5$ mg. Po 28 dávkách bude mít v těle $28 \cdot (60 - 4,5) + 4,5 = 1559,5$ mg, zatímco po 27 dávkách to bude $27 \cdot (60 - 4,5) + 4,5 = 1503$ mg a po 26 $26 \cdot (60 - 4,5) + 4,5 = 1447,5$ mg.
Bude-li Míša brát léky každých 8 hodin, vyléčí se po 27 dávkách, tedy za $(27 \cdot 8 - 8)/24 = 8 + \frac{2}{3}$ dne, tedy příští týden v úterý ve 23 hodin. Jestliže bude brát léky s frekvencí 9 hodin, vyléčí se rovněž po 27 dávkách, ale léčba potrvá $(27 \cdot 9 - 9)/24 = 9 + \frac{3}{4}$ dne, což znamená příští týden ve čtvrtek v 1 hodinu ráno. Doufejme, že Míša není kromě zapomínání také líný a dobere všechny předepsané talbety. V opačném případě by se mohlo stát, že by se bakterie způsobující mor stala odolná vůči Karlině léku, a příště by onemocnění mohlo mít mnohem horší průběh.

Kategorie starší

Úloha 1B (5 bodů):
Adéla určitě stavěla pyramidu odspodu, ale pro naše účely bude lepší postupovat shora dolů. V prvním (nejvyšším) patře bude jen jedna krabička a ve druhém musí být tři. Ve třetím patře musí být tolik krabiček, aby každý roh podstavy krabičky ve druhém patře ležel na nějakém vrcholu krabičky v patře třetím. Zkusme nejprve zjistit, kolik krabiček by muselo být ve třetím patře, aby každý **levý** roh podstavy krabičky ve druhém patře ležel na nějakém vrcholu. Zjevně jich bude stejně, kolik je krabiček ve druhém patře. Aby byla pyramida stabilní, zbývá podepřít rohy podstavy krabiček, které jsou nejvíce vpravo. Na to potřebujeme tři krabičky - o jednu krabičku víc, než je délka strany druhého patra. Obecně v $k+1$ patře bude tolik krabiček, kolik bylo v k-tém patře plus $k+1$. Půdorys prvních čtyřech pater je na následujícím obrázku:



Obrázek 1 Krabičky v nejvyšších čtyřech patrech

Z obecného návodu vyplývá, že celkový počet krabiček je dán následujícím součtem:

$$n = 1 + (1+2) + (3+3) + (6+4) + (10+5) + (15+6) + (21+7) + (28+8) + \\ + (36+9) + (45+10) + (55+11) + (66+12) + (78+13) + (91+14) + (105+15) = 680.$$

Adéla má ve sklepě 680 oříšků.

Úloha 2B (6 bodů):
Formička se skládá ze dvou půlkruhů o stejném průměru a jednoho čtverce. Její obsah je tedy

$$S = \frac{\pi a^2}{4} + a^2. \tag{6}$$

Obvod formičky je tvořen dvěma půlkružnicemi a dvěma stranami čtverce. Obvod celé formičky je roven

$$o = \pi a + 2a. \tag{7}$$

Jinřich by si přál, aby se obsah číselně rovnal obvodu, tedy

$$S = o. \tag{8}$$

Po několika úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\pi a^2}{4} + a^2 &= \pi a + 2a \\ \pi a^2 + 4a^2 &= 4\pi a + 8a \\ (\pi+4)a^2 &= (4\pi+8)a \\ (\pi+4)a &= (4\pi+8) \\ a &= \frac{(4\pi+8)}{(\pi+4)} \\ a &\doteq 2,88 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Neznámá a se rovná $2,88$ cm.

Úloha 3B (7 bodů):
Na první pohled se zdá, že máme příliš mnoho neznámých a málo rovnic. Ze zadání víme, že v prvním pokusu byla počáteční teplota ploutví $t_1 = 15°\mathrm{C}$, počáteční teplota lahve $t_2 = 75°\mathrm{C}$ a výsledná teplota (ploutví i lahve) $t = 27°\mathrm{C}$. O zbylých čtyřech neznámých nemůžeme nic říct, ale snadno spočítáme poměr $\frac{c_1 m_1}{c_2 m_2}$:

$$\begin{aligned} c_1 m_1 (t - t_1) &= c_2 m_2 (t_2 - t) \\ \frac{c_1 m_1}{c_2 m_2} &= \frac{t_2 - t}{t - t_1} \\ \frac{c_1 m_1}{c_2 m_2} &= \frac{75 - 27}{27 - 15} = 4. \end{aligned}$$

Hans by chtěl ovšem nahřát ploutve na 37 °C. Odteď bude $t_1 = 15°\mathrm{C}$, $t = 37°\mathrm{C}$ a t_2 neznáme a chceme spočítat:

$$\begin{aligned} c_1 m_1 (t - t_1) &= c_2 m_2 (t_2 - t) \\ t_2 - t &= (t - t_1)\frac{c_1 m_1}{c_2 m_2} \\ t_2 &= (t - t_1)\frac{c_1 m_1}{c_2 m_2} + t = (37 - 15)4 + 37 = 125°\mathrm{C}. \end{aligned} \tag{9}$$

Kdyby si Hans pořídil dvakrát těžší ohřívací láhev (označme její hmotnost $m_2' = 2m_2$), velikost poměru $\frac{c_1 m_1}{c_2 m_2}$ by se změnila takto:

$$\frac{c_1 m_1}{c_2 m_2'} = \frac{c_1 m_1}{2 c_2 m_2} = 2.$$

Těžší lahev by stačilo nahřát na

$$t_2 = (t - t_1)\frac{c_1 m_1}{c_2 m_2'} + t = (37 - 15)2 + 37 = 81°\mathrm{C}. \tag{10}$$

Lehčí lahev musí Hans nahřát na 125 °C, zatímco těžší na 81 °C.

Úloha 4B (9 bodů):
Připomeňme si pravidla, která Simeon objevil na oné hliněné tabulce:

$$\{x, x\} = 0 \qquad \{p, p\} = 0 \qquad \{x, p\} = 1 \tag{11}$$

$$\{x, p\} = -\{p, x\} \qquad \{p, x\} = -\{x, p\} \tag{12}$$

$$x^2 = x \cdot x \qquad p^2 = p \cdot p \tag{13}$$

Je-li α nějaké číslo, potom

$$\{\alpha f, g\} = \alpha\{f, g\} \qquad \{f, \alpha g\} = \alpha\{f, g\}. \tag{14}$$

Pro libovolné výrazy f, g a h platí

$$\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\} \qquad \{f, g + h\} = \{f, g\} + \{f, h\} \tag{15}$$

$$\{f \cdot g, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \qquad \{f, g \cdot h\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h. \tag{16}$$

Jediné, co musí Simeon udělat, je použít správné pravidlo ve správnou chvíli. Každý si jistě všiml, že druhý člen ve složené závorce $\dot{T} = \left\{\frac{p^2}{2m}, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\right\}$ obsahuje součet. O součtu se také zmiňuje pravidlo (11). Jestliže položíme $f = \frac{p^2}{2m}$, $g = \frac{p^2}{2m}$ a $h = \frac{1}{2}kx^2$, přepíšeme $\dot{T}$ po první úpravě na

$$\dot{T} = \left\{\frac{p^2}{2m}, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\right\} = \left\{\frac{p^2}{2m}, \frac{p^2}{2m}\right\} + \left\{\frac{p^2}{2m}, \frac{1}{2}kx^2\right\}. \tag{17}$$

Zlomky $\frac{1}{2m}$ i $\frac{1}{2}k$ jsou čísla a podle pravidla (14) je můžeme přepsat před závorku:

$$\left\{\frac{p^2}{2m}, \frac{p^2}{2m}\right\} + \left\{\frac{p^2}{2m}, \frac{1}{2}kx^2\right\} = \frac{1}{2m}\left\{p^2, \frac{p^2}{2m}\right\} + \frac{1}{2m}\left\{p^2, \frac{1}{2}kx^2\right\} = \frac{1}{4m^2}\left\{p^2, p^2\right\} + \frac{k}{4m}\left\{p^2, x^2\right\}. \tag{18}$$

Soustřeďme se nyní na výraz $\{p^2, p^2\}$. Podle pravidla (13) je roven $\{p \cdot p, p \cdot p\}$ a v této podobě ho můžeme dále upravit opakovaným použitím pravidla (16):

$$\{p\cdot p, p\cdot p\} = p\{p, p\cdot p\} + \{p, p\cdot p\}p = p\big(p\{p,p\} + \{p,p\}p\big) + \big(p\{p,p\} + \{p,p\}p\big)p. \tag{19}$$

Z pravidla (**11**) víme, že $\{p, p\} = 0$, takže i celý složitý výraz (**19**) je roven 0. Dále pokračujme závorkou $\{p^2, x^2\}$ a podobně jako v předchozím případě ji postupně upravíme na

$$\begin{aligned}\{p^2, x^2\} &= \{p\cdot p, x\cdot x\} = \\ &= p\{p, x\cdot x\} + \{p, x\cdot x\}p = \\ &= p(x\{p,x\} + \{p,x\}x) + (x\{p,x\} + \{p,x\}x)p = \\ &= p(-x-x) + (-x-x)p = \\ &= -4px. \end{aligned}\tag{20}$$

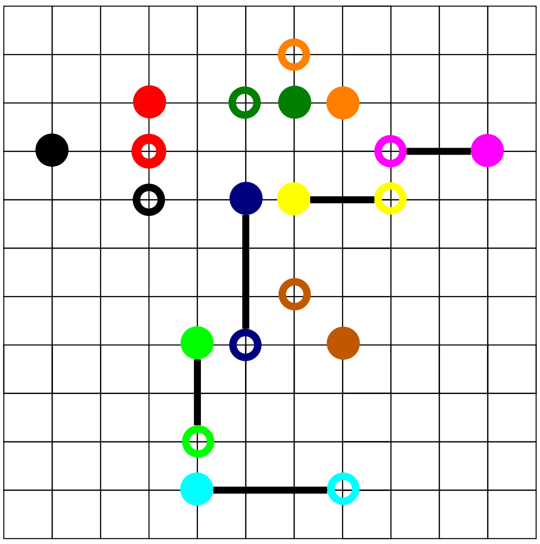
Dosazením (**20**) do (**18**) dostaneme, že

$$\dot{T} = \frac{1}{4m^2}\left\{p^2, p^2\right\} + \frac{k}{4m}\left\{p^2, x^2\right\} = -\frac{k}{4m}4px = -\frac{kpx}{m}. \tag{21}$$

Zbavili jsme se všech složených závorek a protože o k, p, x, m nic bližšího nevíme a nemůžeme ani použít žádné z pravidel (**11**)–(**16**), $\dot{T}$ ve všedním zápisu vypadá takto:

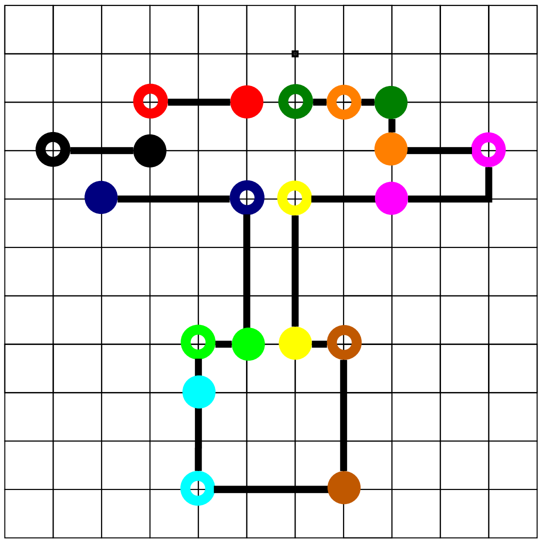
$$\dot{T} = -\frac{kpx}{m}. \tag{22}$$

Úloha 5B (5 bodů):
Doufejme, že si Terka nakreslila rozmístění hub na průsvitný papír. Po přiložení plánků prvních dvou stavů přes sebe totiž snadno odhalíme alespoň některé části chodeb:



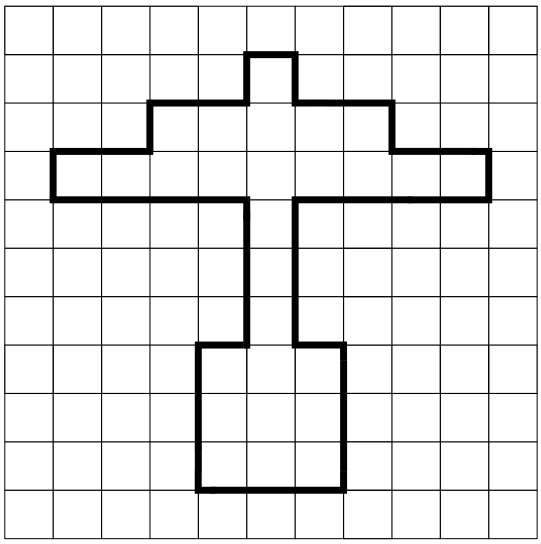
Obrázek 2 Pozice hub v prvních dvou okamžicích

Prázdná kolečka jsou pozice hub v prvním okamžiku a plná kolečka ve druhém. Protože se houby mohou posunout nejvýše o tři políčka, všechna kolečka stejné barvy, která jsou od sebe dvě nebo tři políčka, můžeme spojit chodbou, protože jiným způsobem se příslušné houby nemohou přesunout (světle zelená, žlutá, růžová a obě modré houby). Jedinou výjimkou je černá houba, nemůžeme vyloučit, že se chodba v těchto místech neklikatí. Přidáme-li pozice hub ve třetím okamžiku, můžeme nakreslit téměř všechny chodby (tentokrát jsou prázdná kolečka pozice hub ve druhém okamžiku a plná ve třetím):



Obrázek 3 Pozice hub ve druhém a třetím okamžiku

Černá, červená, žlutá, hnědá a obě modré houby se přemístily o dvě nebo tři políčka v přímém směru, takže příslušná kolečka můžeme spojit pomyslnou chodbou. Růžová houba sice neběžela v přímém směru, ale protože se cesty nesmí křížit a nemohla ujít více než tři políčka, existuje jen jeden způsob, jak mezi dvě růžová kolečka doplnit cestu. Podobnou úvahou nakreslíme chodbu mezi dvěma pozicemi světle zelené, tmavě zelené a oranžové houby a nyní už snadno odhalíme všechny podzemní chodby:



Obrázek 4 Řešení