

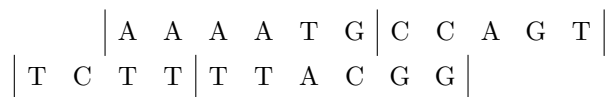
Kategorie mladší

Úloha 1A (5 bodů):

Existuje mnoho různých cest, které všechny vedou ke správnému cíli. Na ukázkou tedy alespoň jedna z nich. Není špatné zkusit se „odpíchnout“ od nějaké výrazné části genetického kódu. Takovou je v našem případě třeba úsek AAAATG. Čtyřem A za sebou podle návodu odpovídá sekvence čtyř T. Takovou zdánlivě v nabídce nemáme. Když si ale rozstříhané úseky pozorně prohlédnete, najdete úsek TCTT, který dvěma T končí, a TTACGG, který jimi pro změnu začíná. Vida, máme požadovaná čtyři T a můžeme tyto tři části dát dohromady:



Obdobným způsobem budeme pokračovat dále. Na pravém konci našeho řetězce nyní máme dvě G – hledáme tedy řetězec, který by začínal dvěma C. Takový máme jenom jeden, CCAGT:



Není už těžké doplnit, že na pravém konci by nyní následovala sekvence TCA, která nám řetězec na této straně ukončí. Podobným způsobem budeme pokračovat i na levém konci, až dostaneme původní řetězec:



Bakterie Beatrice je zachráněna!

Úloha 2A (6 bodů):

Nejprve je třeba zjistit, jak se Radko po louce pohybuje. Začínal na políčku [1, 2] a podle popsaného pravidla další číslo vyrostlo na souřadnicích [1 + 1 + 2, 2 + 1 + 2] = [4, 5]. Třetí číslo vyrostlo na souřadnicích [1 + 4 + 5, 2 + 4 + 5] = [10, 11] = [0, 1], čtvrté na [2, 3], páté na [6, 7], šesté znovu na [4, 5], sedmé na [0, 1]... Vidíme, že se dostáváme do kruhu a že čísla rostou pořád dokolečka na políčkách [4, 5], [0, 1], [2, 3], [6, 7], [4, 5], [0, 1], [2, 3], [6, 7]...

Radkova cesta během jednoho dne se pak skládá ze šesti kroků: Nejprve se Radko plazí z domečku (souřadnice [0, 0]) na políčko s prvním číslem, odtud pak ke druhému číslu, třetímu, čtvrtému, pátému a na závěr od pátého čísla zpátky do domečku. Prostým spočítáním čtverečků nyní určíme vzdálenosti jednotlivých políček, na kterých rostou čísla:

$$[4, 5] - [0, 1] \rightarrow 8 \text{ m}$$

$$[0, 1] - [2, 3] \rightarrow 4 \text{ m}$$

$$[2, 3] - [6, 7] \rightarrow 8 \text{ m}$$

$$[6, 7] - [4, 5] \rightarrow 4 \text{ m}$$

Takové cesty mezi jednotlivými čísly Radko za den podnikne čtyři. A protože se stále střídá vzdálenost 4 a 8 m, bez ohledu na to, na kterém ze čtyř políček ráno vyrostou první čísla, uplází Radko mezi jednotlivými čísly za den vzdálenost 4+8+4+8 = 24 m.

Zbývá vyřešit, jak daleko to má Radko z domečku na první políčko a večer pak zase zpátky. Protože čísla rostou pořád dokola na čtyřech různých pozicích, na jednom políčku vyrostou dvě čísla za den – jedno hned ráno a jedno až večer. Cesta z a do domečku je tedy ráno i večer stejně dlouhá. Pochopitelně se ale liší pro jednotlivá políčka. Na políčko [4, 5] je to 9 m, na [0, 1] 1 m, na [2, 3] 5 m a na [6, 7] 13 m.

Kolik metrů tedy Radko uplází za 10 dní? Každý den uplází 24 m mezi jednotlivými čísly (tato vzdálenost se nemění), k tomu ještě musíme přičíst cestu z a do domečku. Protože ale nevíme, ve které fázi plazení se Radko právě nachází (tedy na kterém ze čtyř políček vyrostou čísla první den), musíme určit vzdálenost pro všechny možnosti. Jestliže první den vyrostou první čísla na políčku [4, 5], naplází Radko cestou z a do domečku 18 m (2 · 9 m). Druhý den ráno se plazí na políčko [0, 1], celkem tedy 2 · 1 = 2 m. Třetí den na a z políčka [2, 3] to má celkem 10 m, čtvrtý den na políčko [6, 7] 26 m. Pátý den se plazí znovu na [4, 5], šestý na [0, 1] a tak dále, až desátý den skončí na [0, 1]. Celkem tedy v tomto případě naleze (10 · 24 + 3 · 18 + 3 · 2 + 2 · 10 + 2 · 26) m = 372 m.

Podobným způsobem určíme pro případ, že první den začíná na $[0, 1]$, vzdálenost 364 m, pro políčko $[2, 3]$ 388 m a pro políčko $[6, 7]$ 396 m. Určit vzdálenost uplazenou za 28 dní už pak není těžké. Každý den urazí Radko opět 24 m mezi jednotlivými čísly, k tomu ještě 28 cest z a do domečku – každou ze čtyř různě dlouhých tedy Radko podnikne sedmkrát, bez ohledu na to, kde začíná první den. Celkem za 28 dní urazí: $28 \cdot 24 + 7 \cdot 18 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 10 + 7 \cdot 26 = 1064$ m.

Úloha 3A (7 bodů):

Nápověda nám radí: Představte si celý obvod jako sčítání dvou čísel pod sebou. Nápovědě se většinou vyplatí věřit, začneme tedy tak, jak nám radí, a podíváme se, jakým principem se sčítá pod sebou. Zkusíme sečíst třeba čísla 28 a 94. Nejprve spolu sečteme čísla na místě jednotek ($4 + 8 = 12$), dvojku napíšeme na poslední místo výsledku a jedničku si „držíme“ (vyznačeno červeně):

$$\begin{array}{r} 28 \\ 94 \\ \hline 12 \end{array}$$

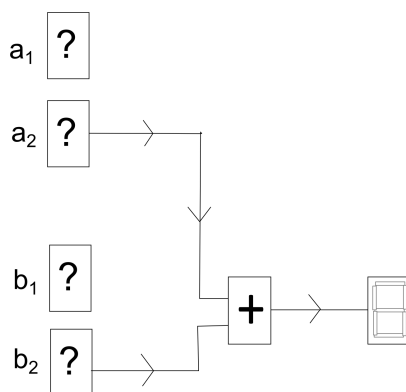
Nyní spolu sečteme čísla na místě desítek ($2 + 9 = 11$), přičteme k nim červenou jedničku ($11 + 1 = 12$) a poslední číslici (2) opět napíšeme do výsledku, jedničku si „držíme“:

$$\begin{array}{r} 28 \\ 94 \\ \hline 122 \end{array}$$

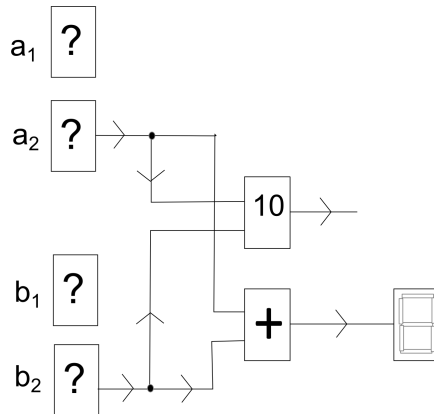
Poslední, co nám zbývá, je sečíst číslice na místě stovek. Tam si můžeme představit dvě nuly, ke kterým ještě přičteme červenou jedničku z předchozího sčítání desítek ($0 + 0 + 1 = 1$) a na první místo výsledku napíšeme číslici 1:

$$\begin{array}{r} 28 \\ 94 \\ \hline 122 \end{array}$$

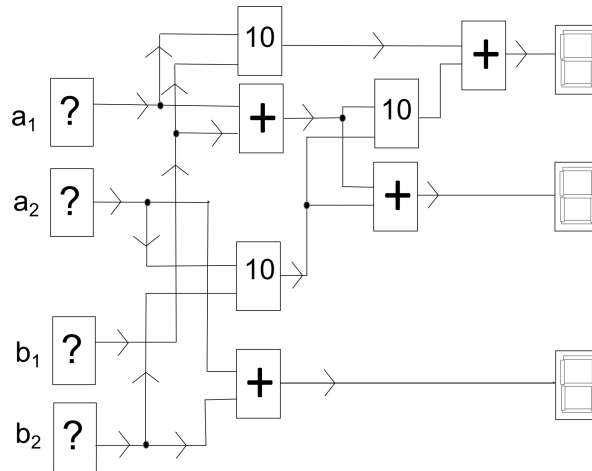
Nyní se můžeme pustit do sestavování obvodu. Je jasné, že musíme začít tím, že do přístroje zadáme čísla. Pokud chceme sčítat dvě dvouciferná čísla, potřebujeme celkem čtyři tlačítka (pro každou cifru jedno). Tlačítka pro zadání číslic prvního čísla označíme a_1 a a_2 , druhého čísla b_1 a b_2 . Analogicky se sčítáním pod sebou nyní musíme sečíst číslice na pozici jednotek obou čísel (tedy $a_2 + b_2$) a poslední číslici jejich součtu napsat na poslední pozici ve výsledku – a to je přece přesně to, co umí sčítačka:



Co když je ale součet $a_2 + b_2$ větší než 10? Na displeji se nám správně zobrazí poslední číslice, ale potřebujeme si někde zaznamenat i tu jedničku, kterou budeme za chvíli (stejně jako při sčítání pod sebe) přičítat k číslicím na pozici desítek. K tomu se výborně hodí krabička označená symbolem 10:



Tím máme vyřízené číslice na pozici jednotek a můžeme se vrhnout na cifry na pozici desítek (tedy a_1 a b_1). Stejně jako u sčítání pod sebe je zkratka sečteme, poté k nim nesmíme zapomenout přičíst jedničku (popř. nulu), kterou jsme dostali při sčítání číslic a_2 a b_2 – tedy výstup krabičky se symbolem 10. Poslední číslici výsledku tohoto sčítání zobrazíme na dalším displeji. Nakonec musíme ošetřit situaci, kdy $a_1 + b_1 \geq 10$ a nebo $a_1 + b_1 = 9$ a ze součtu jednotek si pamatujeme jedničku. V tom případě potřebujeme ještě na první místo výsledku napsat číslici 1. To, jak už víme, umí kombinace krabiček 10 a +:



Máme hotovo, můžeme sčítat!

Úloha 4A (9 bodů):

Nejprve se pokusíme najít nejkratší cestu z Braşova do Iaşi. Vypíšeme si naše počáteční znalosti o délkách cest, které jsou, mírně řečeno, žádné:

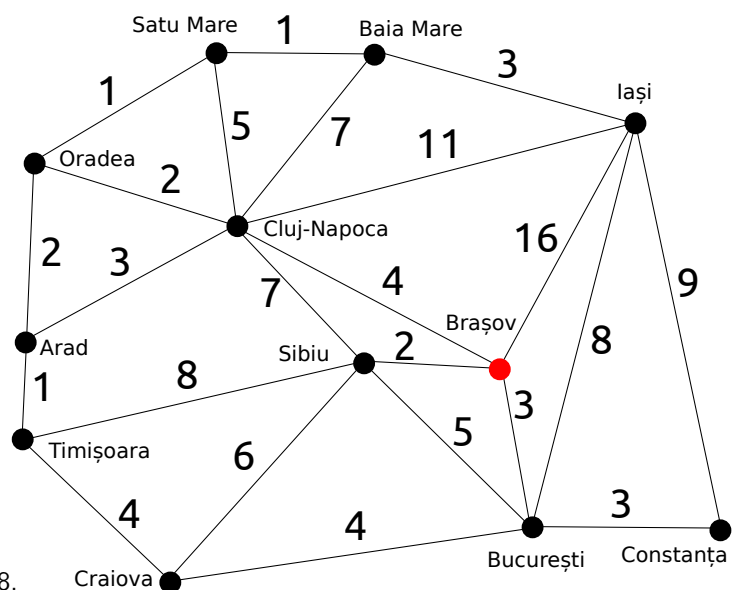
Braşov 0, Oradea 1000, Arad 1000, Timişoara 1000, Satu Mare 1000, Cluj-Napoca 1000, Sibiu 1000, Craiova 1000, Baia Mare 1000, Bucureşti 1000, Iaşi 1000, Constanţa 1000

Začínáme v Braşově, postupně projdeme všechny jeho **ne navštívené** sousedy a přepočítáme nejkratší známé cesty do těchto měst. Zároveň označíme Braşov jako navštívený (označeno tučně):

Braşov 0, Sibiu 1000→2, Bucureşti 1000→3, Cluj-Napoca 1000→4, Iaşi 1000→16, Oradea 1000, Arad 1000, Timişoara 1000, Satu Mare 1000, Craiova 1000, Baia Mare 1000, Constanţa 1000

Přesuneme se do města, které jsme ještě nenavštívili a do něhož je dosud známá cesta z Braşova nejkratší, tedy do Sibiu, a stejně jako v předchozím kroku přepočítáme nejkratší známé cesty do jeho **ne navštívených** sousedů:

Braşov 0, **Sibiu 2**, Bucureşti 3, Cluj-Napoca 4, Craiova 1000→8, Timişoara 1000→10, Iaşi→16, Oradea 1000, Arad 1000, Satu Mare 1000, Baia Mare 1000, Constanţa 1000



V tuto chvíli už zcela jistě známe nejkratší cestu do Sibiu, nemůže existovat oklika, která je kratší. Kdyby totiž taková byla, museli bychom se jí už vydat a tak ji objevit. Další na řadě je București:

Brašov 0, Sibiu 2, București 3, Cluj-Napoca 4, Constanța 1000→6, Craiova 8→7, Timișoara 10, Iași 16→11, Oradea 1000, Arad 1000, Satu Mare 1000, Baia Mare 1000

Nyní bezpečně známe nejkratší cestu i do București. Následuje Cluj-Napoca:

Brašov 0, Sibiu 2, București 3, Cluj-Napoca 4, Constanța 6, Oradea 1000→6, Craiova 7, Arad 1000→7, Satu Mare 1000→9, Timișoara 10, Iași 11, Baia Mare 1000→11

Nyní by měla následovat Constanța, ale protože se nic nezmění, přesuneme se rovnou do Oradey:

Brašov 0, Sibiu 2, București 3, Cluj-Napoca 4, Constanța 6, Oradea 6, Craiova 7, Arad 7, Satu Mare 9→7, Timișoara 10, Iași 11, Baia Mare 11

Další na řadě je Craiova, ale protože se v ní také nic nezmění, pokračujeme Aradem:

Brašov 0, Sibiu 2, București 3, Cluj-Napoca 4, Constanța 6, Oradea 6, Craiova 7, Arad 7, Satu Mare 7, Timișoara 10→8, Iași 11, Baia Mare 11

Další je Satu Mare:

Brašov 0, Sibiu 2, București 3, Cluj-Napoca 4, Constanța 6, Oradea 6, Craiova 7, Arad 7, Satu Mare 7, Timișoara 8, Baia Mare 11→8, Iași 11

Správně bychom měli mechanicky pokračovat ještě pro zbylá tři města, ale nic by se už nezměnilo a nejkratší cesta do Iași měří 11, její odhad se měnil takto: 1000→16→11 a můžeme si vybrat, zda pojedeme z Brašova přes București, nebo přes města Cluj-Napoca, Oradea, Satu Mare a Baia Mare. Naše cestychtivá dvojice by ale chtěla znát nejkratší cesty z Brašova do **všech** měst v království Făgăraș. Musíme spouštět algoritmus pro každé město znovu? Nemusíme. Během hledání cesty do Iași jsme totiž našli i nejkratší cesty do všech ostatních měst. Všechny vzdálenosti jsou bez jednotek, kdo ví, zda představují stovky kilometrů, čas jízdy vlakem v hodinách, cenu lístku na autobus...

Úloha 5A (5 bodů):

Výpočet začneme od kmene, který je nejjednodušší, protože je jediný a není tak vlastně co počítat:

$$l_0 = 16 \text{ m}$$

Na každé ze čtyřech stran kmene rostou čtyři větve první velikosti. Dohromady jich je $4 \cdot 4 = 16$ a každá má 4 metry, takže jejich celková délka je

$$l_1 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \text{ m}$$

Na každé z těchto větví roste $8 \cdot 8 = 64$ kratších větví druhé velikosti dlouhých 1 metr (8 stran a na každé jich je 8), na celém stromě jich je $16 \cdot 64 = 1024$. Jejich celková délka bude po vynásobení

$$l_2 = 1024 \cdot 1 = 1024 \text{ m}$$

Z každé větve druhé velikosti navíc raší $16 \cdot 16 = 256$ větví třetí velikosti. Na celém stromě jich je opravdu hodně, dohromady $1024 \cdot 256 = 262144$. Protože každá měří $25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m}$, je celková délka větví třetí velikosti rovna

$$l_3 = 262144 \cdot 0,25 = 65536 \text{ m}$$

Celková délka všech větví a kmene arboretníku duruidova je

$$l = l_0 + l_1 + l_2 + l_3 = (16 + 64 + 1024 + 65536) \text{ m} = 66640 \text{ m}$$

Kategorie starší

Úloha 1B (5 bodů):

Než začneme cokoli počítat, převedeme rychlosti všech stříhaček na stejné jednotky. Nejrozumnější budou centimetry za minutu:

$$\text{Anežka: } 432 \text{ dm} \cdot \text{hod}^{-1} = 72 \text{ cm} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$\text{Bětka: } 36 \text{ m} \cdot \text{hod}^{-1} = 60 \text{ cm} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$\text{Cílka: } 72 \text{ cm} \cdot \text{min}^{-1} = 72 \text{ cm} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$\text{Dominika: } 90 \text{ cm} \cdot \text{min}^{-1} = 90 \text{ cm} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$\text{Evženie: } 9 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1} = 54 \text{ cm} \cdot \text{min}^{-1}$$

Představme si na chvíli, že stříhačky pracují bez přestávky tak dlouho, dokud nevystříhají právě tolik papíru, kolik měří součet obvodů všech oveček (bez ohledu na to, že některé zůstanou vystřížené jen napůl). Celkový obvod všech oveček je $36 \cdot 40 = 1440 \text{ cm}$ a naše hrdinky by v takovém případě byly hotovy za

$$t_r = \frac{36 \cdot 40}{72 + 60 + 72 + 90 + 54} \text{ min} = \frac{1440}{348} \text{ min} = 4,14 \text{ min} \quad (1)$$

Podle zadání však na konci musí být všechny ovečky úplně vystřížené. Podívejme se tedy, kolik celých oveček stačí jednotlivé stříhačky za 4,14 minuty zpracovat:

$$\text{Anežka: } 4,14 \cdot 72/36 = 8,27 \dots 8 \text{ oveček za } 8 \cdot 36/72 = 4 \text{ minuty}$$

$$\text{Bětka: } 4,14 \cdot 60/36 = 6,90 \dots 6 \text{ oveček za } 6 \cdot 36/60 = 3,6 \text{ minuty}$$

$$\text{Cílka: } 4,14 \cdot 72/36 = 8,27 \dots 8 \text{ oveček za } 8 \cdot 36/72 = 4 \text{ minuty}$$

$$\text{Dominika: } 4,14 \cdot 90/36 = 10,34 \dots 10 \text{ oveček za } 10 \cdot 36/90 = 4 \text{ minuty}$$

$$\text{Evženie: } 4,14 \cdot 54/36 = 6,21 \dots 6 \text{ oveček za } 6 \cdot 36/54 = 4 \text{ minuty}$$

Po 4 minutách bude hotovo $8+6+8+10+6 = 38$ oveček a až na Bětku, která může 0,4 minuty (24 sekund) odpočívat, budou ostatní celou dobu stříhat. Zbývá rozdělit dvě ovečky. Existují dvě možnosti: buď je svěřit dvěma nejrychlejšími stříhačkám, nebo dát jednu Bětce, aby se nenudila a druhou Dominice (stříhá nejrychleji). Není těžké dopočítat, že druhá možnost je lepší. Bětka skončí po $3,6 + 36/60 = 4,2$ minutách a Dominika po $4 + 36/90 = 4,4$ minutách. Vystřížení všech oveček tedy potrvá 4,4 minuty (4 minuty a 24 sekund) a Anežka zvládne 8 oveček, Bětka 7, Cílka 8, Dominika 11 a Evženie 6 oveček.

Úloha 2B (6 bodů):

Z pravidel dělitelnosti víme, že číslo je dělitelné 10, právě když končí nulou. Dále jestliže vynásobíme nějaké číslo deseti, výsledek získáme prostým připsáním nuly na jeho konec. A naopak, číslo můžeme tolikrát vydělit beze zbytku deseti, kolika nulami končí. Protože $10 = 2 \cdot 5$, můžeme také říct, že číslo je tolikrát dělitelné beze zbytku deseti, kolik párů 2, 5 se nachází v jeho prvočíselném rozkladu. Začneme s pětkou. Číslo 101! si také můžeme představit jako součin všech prvočíselných rozkladů čísel od 1 do 101. Pětka se vyskytuje v

$$5=5$$

$$10=2 \cdot 5$$

$$15=3 \cdot 5$$

$$20=2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$25=5 \cdot 5$$

$$30=2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$35=7 \cdot 5$$

$$40=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$45=3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$50=2 \cdot 5 \cdot 5$$

$$55=5 \cdot 11$$

$$60=2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$65=5 \cdot 13$$

$$70=2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$75=3 \cdot 5 \cdot 5$$

$$80=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$85=5 \cdot 17$$

$$90=2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$95=5 \cdot 19$$

$$100=2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Dohromady 24 pětek (5^{24}). Dvojek obsahuje prvočíselný rozklad 101! evidentně více, vždyť jen sudých čísel mezi 1 a 101 je 50. Počet párů 2, 5 tedy bude 24 a číslo 101! končí 24 nulami.

Úloha 3B (7 bodů):

Objem vody, která z pramene vyteče za 10 minut, je roven rozdílu objemu Jarky na konci a na začátku hltání. Vztah pro objem koule je

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

kde $\pi \doteq 3,14$ a r je poloměr koule. Sílu pramene můžeme vyjádřit jako

$$p = \frac{V_2 - V_1}{t} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_2^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^3}{t} = \frac{4\pi (r_2^3 - r_1^3)}{3t}, \quad (2)$$

kde p je síla pramene, V_2 je objem Jarky na konci hltání, V_1 je objem Jarky na začátku hltání, r_2 a r_1 jsou její poloměry na konci a na začátku hltání a t je čas. Poslední, na co si musíme dát pozor, jsou jednotky – protože zvířátka potřebují pramen o síle alespoň 5 litrů za sekundu, je výhodné vyjádřit poloměr Jarky v decimetrech (10 cm = 1 dm, 1 m = 10 dm) a čas v sekundách (10 min = 600 s). Nyní už můžeme dosadit:

$$p = \frac{4\pi (r_2^3 - r_1^3)}{3t} = \frac{4\pi (10^3 - 1^3)}{3 \cdot 10 \cdot 60} \text{ l} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 6.97 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$$

Z pramene tedy teče téměř 7 litrů vody za sekundu a zvířátkům se rozhodně vyplatí pokusit se ji odehnat.

Úloha 4B (9 bodů):

Nejprve načteme dvě čísla z klávesnice a uložíme je na druhé a třetí políčko. Toho dosáhneme jednoduchou kombinací příkazů ', ' a '>':

- > *Posuň hlavu na druhé políčko.*
- , *Načti číslo z klávesnice.*
- > *Posuň hlavu na třetí políčko.*
- , *Načti číslo z klávesnice.*

Ukázkový program ze zadání umí přičíst číslo z jednoho políčka k obsahu políčka předchozího. Toho můžeme využít, navíc však potřebujeme jeho variantu, která přenese číslo z třetího políčka na první:

- [*Dělej dokud aktivní políčko není nulové*
- *Zmenši číslo na aktivním políčku o 1.*
- << *Posuň hlavu o dvě políčka doleva.*
- + *Zvětši číslo na aktivním políčku o 1.*
- >> *Posuň hlavu o dvě políčka doprava.*
-] *Jestliže je aktivní políčko nulové, skonči.*

Teď už můžeme jednotlivé kousky poskládat dohromady. Musíme si jen dát pozor, abychom mezi cykly a po jejich skončení přesunuli čtecí hlavu na správné políčko, aby se program nezacyklil nebo předčasně neskončil.

- > *Posuň hlavu na druhé políčko.*
- , *Načti číslo z klávesnice.*
- > *Posuň hlavu na třetí políčko.*
- , *Načti číslo z klávesnice.*
- [*Dělej dokud aktivní (třetí) políčko není nulové*
- *Zmenši číslo na aktivním (třetím) políčku o 1.*
- << *Posuň hlavu o dvě políčka doleva.*
- + *Zvětši číslo na aktivním (prvním) políčku o 1.*
- >> *Posuň hlavu o dvě políčka doprava.*
-] *Jestliže je aktivní (třetí) políčko nulové, skonči.*

- < *Posuň hlavu na druhé políčko.*
- [*Dělej dokud aktivní (druhé) políčko není nulové*
- *Zmenši číslo na aktivním (třetím) políčku o 1.*
- < *Posuň hlavu o jedno políčko doleva.*
- + *Zvětši číslo na aktivním (prvním) políčku o 1.*
- > *Posuň hlavu o jedno políčko doprava.*
-] *Jestliže je aktivní (druhé) políčko nulové, skonči.*
- < *Posuň hlavu na první políčko.*
- . *Tisk.*

Úloha 5B (5 bodů):

Zamysleme se nejprve nad Kristýninou výpovědí. Kdyby Kristýna byla nevinná (a mluvila tedy pravdu), platilo by, že nevinní a pravdomluvní jsou také David a Vít. Vít ale říká, že David ukradl dva sýry – je tedy jasné, že nemůže mluvit pravdu, a tím pádem lžou i Kristýna a David.

David tvrdí, že Viktor lže. My už ale víme, že David nemluví pravdu, a je tedy jasné, že Viktor je nevinný a jeho tvrzení („Kristýna ukradla nejvíce sýrů ze všech“) platí. Posledním podezřelým je Radovan, který říká, že jsou mezi nimi alespoň tři zloději. Již nyní víme o třech zvířátkách, která určitě kradla (Kristýna, David, Vít) a Radovan tedy musí mluvit pravdu a je nevinný.

Poslední, co nám zbývá zjistit, je, které zvířátko ukradlo kolik sýrů. Od Viktora víme, že nejvíce sýrů ukradla Kristýna. Rozdělit pět sýrů mezi tři zloděje tak, aby jeden z nich měl více než oba ostatní, je možné jen jedním způsobem – Kristýna ukradla tři sýry a David a Vít každý po jednom.