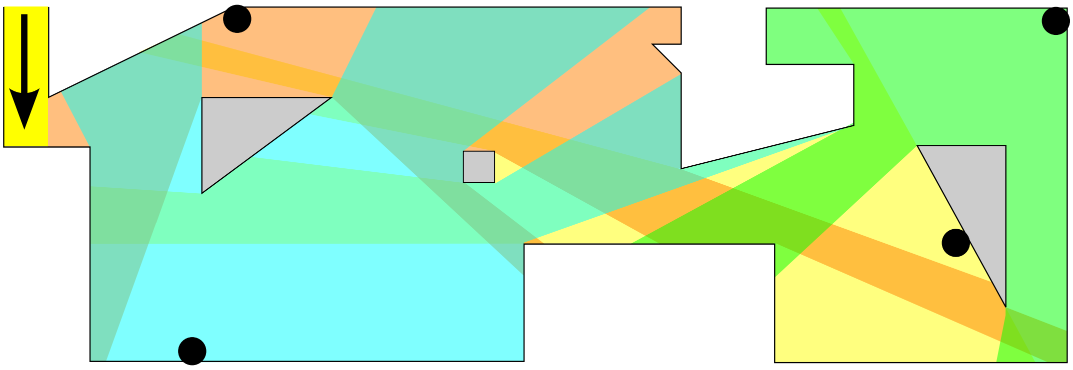
Kategorie mladší

Úloha 1A (5 bodů):
Celou jeskyni lze osvětlit čtyřmi pochodněmi. Jelikož mohou být pochodně umístěny libovolně (dokonce i mimo stěny), existuje nekonečně mnoho správných řešení. Jedno z nich je nakresleno na následujícím obrázku (pochodně jsou znázorněny černými puntíky):



Obrázek 1 Rozmístění pochodní v jeskyni

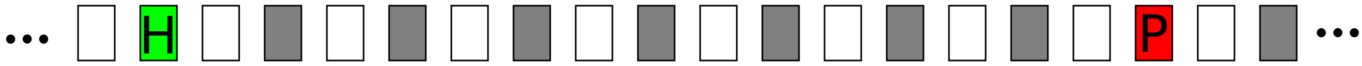
Úloha 2A (7 bodů):
S analýzou „kouzla“ začneme v momentě, kdy sličná asistentka položí svou kartu na jednu z hromádek o neznámém počtu karet (v příkladu jsou označeny jako A a B). Mohou nastat 4 případy:

1. Slečna položí svou kartu na hromádku A a navrch dá C.
2. Slečna položí svou kartu na hromádku A a navrch dá D.
3. Slečna položí svou kartu na hromádku B a navrch dá C.
4. Slečna položí svou kartu na hromádku B a navrch dá D.

Květoslav pak sestaví balík přesně daným způsobem: vezme pomocnou kartu, položí ji na tu z hromádek C a D, kterou jeho sličná asistentka z publika nezvolila, navrch položí tu z hromádek A a B, kterou slečna nevybrala, a výsledný balíček položí navrch zbylých karet. Celý balík tedy může být sestaven jen čtyřmi možnými způsoby:

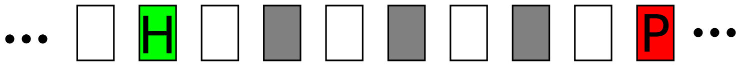
1. A – hledaná karta – C – D – pomocná karta – B
2. A – hledaná karta – D – C – pomocná karta – B
3. B – hledaná karta – C – D – pomocná karta – A
4. B – hledaná karta – D – C – pomocná karta – A

Přesné počty karet v hromádkách C a D sice neznáme, ale víme, že v C+D=D+C je vždy 15 karet, a tedy i mezi hledanou a pomocnou kartou je vždy 15 karet. Když si karty myšleně očíslujeme podle jejich pořadí v balíku, budou pomocná i hledaná buď obě na liché pozici nebo obě na sudé, ale nikdy ne jedna na liché a druhá na sudé.
Vyskládáním karet na stůl (první doprava, druhou doleva, třetí opět doprava atd.) rozdělí Květoslav balík na liché a sudé karty. Už víme, že hledaná i pomocná jsou obě buď liché nebo sudé, takže se určitě ocitnou ve stejné hromádce:



Obrázek 2 Karty po prvním vyskládání na stůl, zelená je hledaná (H), červená pomocná (P), šedé ve stejné hromádce jako pomocná a hledaná.

Nyní je mezi nimi 7 karet, takže i teď platí, že v novém balíčku jsou hledaná i pomocná obě buď liché nebo obě sudé a po dalším vyskládání budou ve stejné hromádce:



Obrázek 3 Karty po druhém vyskládání.

Mezi pomocnou a hledanou jsou nyní tři karty. Dále je již zřejmé, jak kouzlo dopadne: po třetím vyskládání na stůl zbyde mezi hledanou a pomocnou jediná karta (v celé hromádce budou 4) a po čtvrtém vyskládání zůstanou Květoslavovi v ruce (v ploutvi) pouze hledaná a pomocná karta.
Princip kouzla je jednoduchý: po každém vyskládání je mezi hledanou a pomocnou lichý počet karet.

Úloha 3A (8 bodů):
Představme si, že se Luboš nejprve pokusí dopravit co nejvíce banánů do vzdálenosti 50 km od oázy. Může se o to pokusit mnoha způsoby. Např. naložit 200 banánů, ujít 50 km, 100 banánů složit, vrátit se zpátky, to celé 4x a protože popáté se už nemusí vracet zpátky, přenesl by takto 550 banánů a 450 spotřeboval při přesunech. Nebo může zkusit nejprve banány přenést o 25 km a pak o dalších 25 km. K prvnímu mezískladu by donesl 775 banánů (4x naloží 200, složí 150 a popáté přenese 175). Dalších 25 km zvládne na 4 obrátky. V prvních třech vždy naloží 200 banánů, 50 spotřebuje na cestování a 150 převeze. Počtvrté může naložit už jen 175 banánů, ale protože se nemusí vracet, rovněž jich převeze 150. Dohromady $150 \cdot 4 = 600$, tedy více než 550.
Na základě tohoto pozorování by nás mohlo napadnout intervaly dále zkusmo zkracovat, ale vezměme to raději od lesa[1]: kolik banánů může Luboš donést do vzdálenosti 1 km od oázy? Tuto krátkou vzdálenost zvládne na 5 obrátek: v prvních čtyřech převeze 198 banánů a v poslední 199, dohromady 991 a 9 sní při přesnunech. Přes další kilometr pouště by přenesl 991-9=982 banánů, potom 982-9=973 atd., zkrátka ujde-li příslušnou vzdálenost na 5 obrátek, má spotřebu 9 banánů na kilometr. Luboš však nebude chodit na 5 obrátek věčně, jakmile počet banánů klesne pod 800, zvládne je převézt na 4. Kdyby postupoval po kilometrových krůčcích, po $\frac{200}{9} \doteq 22$ km bude mít k dispozici 802 banánů a další kilometr ujde na 4 obrátky (popáté se nemá cenu vracet, v mezískladu budou jen dva banány, které by stejně snědl po cestě). Na čtyři obrátky spotřebuje 7 banánů a takto bezpečně ujde dalších $\frac{200}{7} \doteq 28$ km. Nyní se však i další kilometr vyplatí ujít na 4 obrátky: po třech zbydou v mezískladu 4 banány, dva spotřebuje na cestu a dva převeze, takže po $22 + 28 + 1 = 51$ km má stále k dispozici 597 banánů. Dalších $\frac{197}{5} \doteq 39$ km ujde bezpečně na 3 obrátky (a spotřebou 5 banánů na km). Na další kilometr mu už stačí obrátky 2, potřetí by se vracel pouze pro dva banány, které by po cestě snědl. Můžeme tedy říci, že po $22 + 28 + 1 + 39 = 90$ km zbyde Lubošovi 400 banánů. Dalších $\frac{200}{3} \doteq 66$ zvládne na dvě obrátky (spotřeba 3 banány na km) a ve vzdálenosti $22 + 28 + 1 + 39 + 66 = 156$ km složí 202 banánů. Zbytek cesty už urazí přímo (opět se nemá cenu vracet pro dva banány) a do cíle dojde s $200 - (300 - 156) = 56$ banány na hřbetu. Pochopitelně existuje mnoho strategií, jak může Luboš převézt přes poušť alespoň 10 banánů, avšak ať už se rozhodne pro jakoukoli, nikdy jich nezachová více než 56.

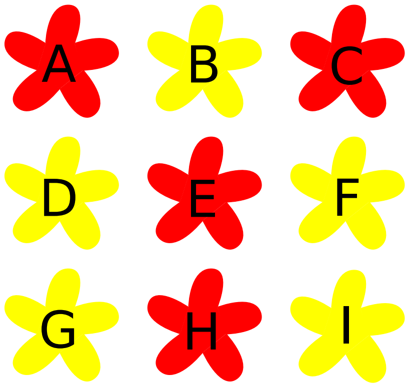
Úloha 4A (10 bodů):
Představme si, že špion o sobě od začátku roztrubuje, že je špion, a vlkodlaci zarytě mlčí. Aby hodná zvířátka vyhrála, musí se všechna chovat čestně, tedy žádné se nesmí vydávat za špiona. Nikdy se nesmí zdržet hlasování, tím by jejich hlas propadl a jen by nahráli vlkodlakům. Za těchto předpokladů proběhne tábor takto:

1. První den nesmí vyhnat mága ani špiona. Toho s jistotou dosáhnou tak, že se buď jedno hodné zvířátko obětuje, navrhne samo sebe a ostatní odhlasují jeho vyhnání, nebo naopak svými hlasy zamítnou všechny návrhy na něčí vyhnání. V prvním případě dojde k jedinému hlasování, na jehož konci zůstane naživu 5 hodných zvířátek, ve druhém budou přinejhorším hlasovat tak dlouho, dokud nepadne tma a žádného účastníka nevyženou (a to i v případě, že někdo navrhne sám sebe: i kdyby vlkodlaci hlasovali pro, každý takový návrh bude vždy zamítnut pěti hlasy proti čtyřem).
2. Mág oživí kohokoli, kdo zemře první noc.
3. Druhý den špion oznámí jména všech vlkodlaků a hodná zvířátka mohou jednoho vyhnat, protože v nejhorším případě jsou stále v přesile pět ku třem.
4. I když v noci vlkodlaci někoho zardousí, na táboře stále zůstanou nejméně 4 hodná zvířátka a mohou tak vyhnat dalšího vlkodlaka.
5. Zbylý vlkodlak sice může během třetí noci zardousit další zvířátko, ale bude to jeho labutí píseň, následující den ho hodná zvířátka vyženou a vyhrají.

Přestože se hodná zvířátka před táborem v obavě před vlkodlaky nijak nedomlouvala, všechna provedla předchozí úvahy a zároveň věděla, že stejně uvažovala i ostatní zvířátka.
Průběh hry může být pro hodná zvířátka i příznivější. Může se totiž stát, že vlkodlaci během druhé nebo třetí noci napadnou zbabělce, který už v tu dobu vlkodlaky zná, označí jednoho z nich a zbývající vlkodlaci jej musí také zabít a tím vítězství dobra paradoxně urychlit. Může se dokonce stát, že poslední vlkodlak bude nucen zardousit sám sebe. Naštěstí je natolik strašlivý, že to po technické stránce zvládne.

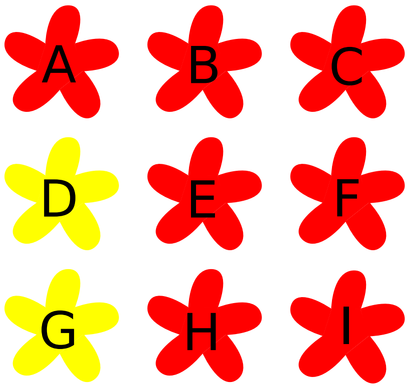
[1] v rámci této úlohy je vhodnější příslušné přísloví upravit na „vezměme to od oázy“

Úloha 5A (6 bodů):
Zkusme pro začátek osázet záhon tak, jako by množství hnojiva nezáviselo na sousedních rostlinách, ale jen na barvě květů a pozici v záhoně. Na každé pozici zvolíme takovou odrůdu, která podle tabulky ze zadání potřebuje menší množství hnojiva:



Obrázek 4 Osázení jen podle tabulky ze zadání

Bohužel pro Halinu množství hnojiva na sousedních rostlinách závisí, takže kdyby záhon osázela jako na obrázku 4, spotřebovala by $5+7+3+3+1+5+5+4+5+9\cdot 1 = 47$ g hnojiva, zatímco limit je 44 g. Všimněme si ale rostlinky na pozici B: všichni její sousedi mají jinou barvu. Kdybychom sazeničku B zvolili červenou, museli bychom podle tabulky ze zadání použít o 1 g hnojiva více, ale zároveň bychom 3 g ušetřili. Podobně výhodná je změna rostlinek F a I ze žluté odrůdy na červenou. Podle tabulky ze zadání nás to bude stát další 2 g hnojiva, avšak zároveň 3 g ušetříme. Po těchto změnách by záhon vzpadal takto:



Obrázek 5 Výsledný záhon

Ačkoli to z našeho postupu přímo nevyplývá, žádnou další změnou už nelze dosáhnout lepšího výsledku (kdo nevěří, může vyzkoušet všechny možnosti nebo použít jistý rychlý algoritmus, který se ale špatně předvádí „na papíře“). Pokud Halina osází záhon jako na obrázku 5, spotřebuje $5+8+3+3+1+6+5+4+6+3\cdot 1 = 44$ g hnojiva.

Kategorie starší

Úloha 1B (5 bodů):
Na podmínku „aby celková cena věcí v batohu byla co největší“ lze pohlížet i trochu jinak: naplnit batoh takovými věcmi, aby poměr cena věcí / kapacita batohu byl co největší. Kdyby mohla zvířátka věci dělit (např. kdyby balila cukr, uhlí, písek apod.), nejlepšího výsledku by dosáhla jejich setříděním podle ceny za kilogram a plněním batohu od nejvýhodnějších k těm nejméně výhodným. Protože však věci dělit nemohou (zkuste někdy pokácet strom půlkou motorové pily), nemají zaručeno, že by takto naplnila celý batoh a dosáhla nejlepší možné ceny. Přesto to však pro začátek není špatný nápad: seřadíme věci podle ceny za kilogram, budeme je postupně dávat do batohu od nejvýhodnějších k nejméně výhodným a pokud batoh zaplníme celý, dosáhli jsme nejlepší ceny, pokud jej nezaplníme, cena jeho obsahu nemusí být největší možná a zkusíme dosáhnout lepší ceny přehozením některých věcí:

1. Plynový vařič: 35 zlatých / 1 kg = 35 zlatých/kg
2. Satelitní telefon: 30 zlatých / 1 kg = 30 zlatých/kg
3. Puška: 120 zlatých / 5 kg = 24 zlatých/kg
4. Konzervy s jídlem: 45 zlatých / 2 kg = 22,5 zlatých/kg
5. Motorová pila: 125 zlatých / 6 kg = 20,83 zlatých/kg
6. Detektor kovů: 115 zlatých / 6 kg = 19,17 zlatých/kg
7. Sekerka a sirky: 25 zlatých / 2 kg = 12,5 zlatých/kg
8. Stan a spacák: 50 zlatých / 4 kg = 12,5 zlatých/kg
9. Doklady a mapy: 12 zlatých / 1 kg = 12 zlatých/kg
10. Náhradní oblečení: 45 zlatých / 4 kg = 11,25 zlatých/kg
11. Termoska s čajem: 20 zlatých / 2 kg = 10 zlatých/kg

Každou z těchto věcí mají zvířátka k dispozici jen jednou, takže nemohou např. zabalit 12 plynových vařičů. Zabalíme-li plynový vařič, satelitní telefon, pušku, konzervy s jídlem a motorovou pilu, bude v batohu 15 kg věcí o celkové hodnotě $35 + 30 + 120 + 45 + 125 = 355$ zlatých a každý jistě vidí, že toto nemůže být nejlepší řešení, neboť v batohu stále zbývá 5 kg místa. Můžeme jej zaplnit buď vhodnou kombinací předmětů, které ještě zbývají v nabídce, nebo nějakou věc nahradit jinými:

- Odebrat satelitní telefon, přidat detektor kovů: $355 - 30 + 115 = 440$ zlatých
- Přidat sekerku a sirky, doklady a mapy a termosku s čajem: $355 + 25 + 12 + 20 = 412$ zlatých
- Přidat stan a spacák a doklady a mapy: $355 + 50 + 12 = 417$ zlatých
- Odebrat konzervy s jídlem, přidat doklady a detektor kovů: $355 - 45 + 127 = 437$ zlatých

Z těchto čtyř možností je nejvýhodnější nahradit satelitní telefon detektorem kovů. Dokonce je nejvýhodnější i celkově, žádnou jinou kombinací předmětů nelze dosáhnout lepší ceny. Zvířátka by měla zabalit plynový vařič, pušku, konzervy s jídlem, motorovou pilu a detektor kovů. Celková cena bude 440 zlatých.

Úloha 2B (7 bodů):
Výraz ze zadání budeme postupně upravovat, dokud nebude mít trochu lidštější podobu:

$$\exp\left(\log\left(\frac{3x-5}{(x-1)(x+5)}\right)+\log(x^2+4x-5)\right)-\log\left(\frac{\exp\left(1+\log(\exp(x)\exp(x))\right)}{\exp(x-1)\exp(x+1)}\right)= \qquad /\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)$$

$$=\exp\left(\log\left(\frac{3x-5}{(x-1)(x+5)}\right)+\log(x^2+4x-5)\right)-\log\left(\frac{\exp\left(1+\log(\exp(2x))\right)}{\exp(2x)}\right)= \qquad /\log(\exp(a))=a$$

$$=\exp\left(\log\left(\frac{3x-5}{(x-1)(x+5)}\right)+\log(x^2+4x-5)\right)-\log\left(\frac{\exp\left(1+2x\right)}{\exp(2x)}\right)= \qquad /\exp(a-b)=\exp(a)/\exp(b)$$

$$=\exp\left(\log\left(\frac{3x-5}{(x-1)(x+5)}\right)+\log(x^2+4x-5)\right)-\log(\exp(1))= \qquad /\log(\exp(a))=a$$

$$=\exp\left(\log\left(\frac{3x-5}{(x-1)(x+5)}\right)+\log(x^2+4x-5)\right)-1=$$

$$=\exp\left(\log\left(\frac{3x-5}{x^2+4-5}\right)+\log(x^2+4x-5)\right)-1= \qquad /\log(a)-\log(b)=\log(a/b)$$

$= \exp\left(\log(3x-5) - \log(x^2+4x-5) + \log(x^2+4x-5)\right) - 1 =$

$= \exp(\log(3x-5)) - 1 =$ $\qquad$ $/\exp(\log(a)) = a$

$= 3x - 5 - 1 = 0$

$3x = 6$

$x = 2$

Kdybychom nyní prohlásili, že řešením příkladu je $x = 2$, dopustili bychom se chyby zvané předčasná radost. V zadání se totiž navíc píše, že ony vztahy mezi log a exp platí pro libovolná dvě **kladná** čísla a a b. Musíme tedy ještě ověřit, zda pro $x = 2$ nikde nenarazíme na log záporného čísla (exp záporného čísla nám nevadí, to vyplývá ze vztahu exp(a-b)=exp(a)/exp(b): jsou-li a a b kladná, může být jejich rozdíl libovolný a rovnost přesto platí). Snadno však vidíme, že se nikde během výpočtu log záporného čísla neobjeví a ani nikde nedělíme nulou, takže můžeme prohlásit, že řešením příkladu je $x = 2$.

Úloha 3B (8 bodů):
Nejprve vyřešíme druhou otázku, která je nejjednodušší. Představme si, že nefouká vítr ($d = 0$), konstanta $i = 0$, na řídicím pultu je nastaveno $u = 100$ a chceme najít takovou hodnotu p, aby vzducholoď hned v první minutě vyletěla do výšky 100 m a ustálila se. Výška vzducholodě v čase $t = 1$ je dána vzorcem

$$y(1) = y(0) + \frac{1}{2}x(1) + d = y(0) + \frac{1}{2}(p \cdot e(1) + i \cdot I(1)) + d \tag{1}$$

V našem případě se vzorec po dosazení zjednoduší na

$$y(1) = y(0) + \frac{1}{2}x(1) + d = \frac{1}{2}pe(1) = \frac{1}{2}p(u - y(0)) = \frac{1}{2}pu \tag{2}$$

Má-li vzducholoď v čase $t = 1$ vyletět do výšky 100 m, musí platit

$$y(1) = \frac{1}{2}pu = 100$$
$$\frac{1}{2}p \cdot 100 = 100$$
$$p = 2 \tag{3}$$

Kolik je $y(2)$? Dosazením do vzorce ze zadání dostaneme

$$y(2) = y(1) + \frac{1}{2}x(2) = y(1) + \frac{1}{2}pe(2) = y(1) + \frac{1}{2}p(u - y(1)) \tag{4}$$

a dále

$$y(2) = y(1) + \frac{1}{2}p(u - y(1)) = 100 + \frac{1}{2}2(100 - 100) = 100 \tag{5}$$

Rovněž $y(3) = 100$, $y(4) = 100$ atd. Odpověď na druhou otázku zní: za daných podmínek musí Janka nastavit $p = 2$.
Co když ale bude foukat vítr (třetí otázka)? Výška vzducholodě v čase $t = 1$ bude

$$y(1) = y(0) + \frac{1}{2}x(1) + d = \frac{1}{2}pe(1) + d = \frac{1}{2}p(u - y(0)) + d = \frac{1}{2}pu + d = \frac{1}{2}2 \cdot u + d = u + d = 100 + d \tag{6}$$

Chování vzducholodě v dalších minutách zjistíme jak jinak než opětovným dosazením do vzorce ze zadání:

$$y(2) = y(1) + \frac{1}{2}x(2) + d = y(1) + \frac{1}{2}p(u - y(1)) + d = y(1) + \frac{1}{2}2u - \frac{1}{2}2y(1)) + d = u + d = 100 + d \tag{7}$$
$$y(3) = y(2) + \frac{1}{2}x(3) + d = y(2) + \frac{1}{2}p(u - y(2)) + d = y(2) + \frac{1}{2}2u - \frac{1}{2}2y(2)) + d = u + d = 100 + d \tag{8}$$
$$\vdots$$

Bude-li foukat vítr a nastavíme-li všechny konstanty, jak nám káže třetí otázka ze zadání, vyletí vzducholoď hned v první minutě do výšky $100 + d$ a tam se ustálí.
První otázka byla ze všech nejtěžší. Nejenže namísto jedné konstanty máme nastavit dvě, kvůli řádění šotka navíc nebylo možné splnit všechny požadavky na chování vzducholodě. Inu, i to se stává, zvířátka si příště jistě dají pozor a nebudou

chtít po nebohé žabce nemožné. Podívejme se alespoň, jak se k požadavkům ze zadání co nejvíce přiblížit. V čase $t = 1$ vyletí vzducholoď do výšky

$$\begin{aligned} y(1) &= y(0) + \frac{1}{2}x(1) + d = \\ &= \frac{1}{2}\left(pe(1) + i(I(0) + e(1))\right) + d = \\ &= \frac{1}{2}\left(p(u - y(0) + i(u - y(0))\right) + d = \\ &= \frac{1}{2}(pu + iu) + d = \\ &= \frac{1}{2}u(p + i) + d \end{aligned}$$

Vzducholoď nesmí v žádném momentě přeletět cílovou výšku o více než 30%. V našem případě to znamená, že nikdy nesmí přeletět výšku 130 m a to ani v čase $t = 1$. Z toho vyplývá, že

$$y(1) = \frac{1}{2}u(p + i) + d \leq 130 \tag{9}$$

Vstupní signál u je v našem případě vždy roven $u = 100$ a ze zadání víme, že tuto nerovnost stačí ověřit pro krajní hodnoty vzestupných proudů d:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(p + i) + d &\leq 130 & \qquad \frac{1}{2}u(p + i) + d &\leq 130 \\ \frac{1}{2}100(p + i) + 20 &\leq 130 & \qquad \frac{1}{2}100(p + i) - 50 &\leq 130 \\ 50(p + i) &\leq 110 & \qquad 50(p + i) &\leq 180 \\ p + i &\leq 2,2 & \qquad p + i &\leq 3,6 \end{aligned} \tag{10}$$

První nerovnost je silnější, takže si stačí pamatovat, že $p + i \leq 2,2$. Bohužel žádná kombinace paremetrů p a i vyhovující nerovnosti **10** nezajistí splnění všech požadavků ostatních zvířátek. Buď se pro $d = -50$ (silné sestupné proudy) nestačí vzducholoď dostat za 10 sekund dostatečně blízko k cílové výšce, nebo, když dovolíme porušení nerovnosti **10**, ji přeletí o více než 30%. Rozumného chování vzducholodě lze dosáhnout např. pro $p = 1,94$ a $i = 0,26$:

	$y(0)$	$y(1)$	$y(2)$	$y(3)$	$y(4)$	$y(5)$	$y(6)$	$y(7)$	$y(8)$	$y(9)$	$y(10)$
$d = 20$	$0,00$	$130,00$	$130,00$	$126,10$	$122,59$	$119,55$	$116,92$	$114,64$	$112,67$	$110,96$	$109,48$
$d = -50$	$0,00$	$60,00$	$67,00$	$71,50$	$75,34$	$78,66$	$81,53$	$84,02$	$86,17$	$88,04$	$89,65$

Úloha 4B (10 bodů):

Zdůrazněme nejprve, že míra zápachu z závisí opravdu jen na hmotnosti zvířátka m, četnosti výživy v (kolikrát během dne zvířátko žere) a na čistotnosti r (kolikrát za měsíc se umývá) a na žádných jiných veličinách. Z prvního pokusu s kočkou víme, že hmotnost m ani četnost umývání r se s časem neměnila, změny pachu tedy způsobovala pouze změna četnosti výživy v. Jelikož zápach narůstal se zvyšující se frekvencí jídla, je zřejmé, že zápach z je přímo úměrný nějaké mocnině četnosti výživy v, tedy

$$z = konst \cdot v^n, \tag{11}$$

kde n zatím neznáme a může nabývat hodnot 1, 2, 3, ... Pokusme se nyní najít správné n. Prostým přepsáním rovnice **11** dostaneme podmínku

$$\frac{z}{v^n} = konst \tag{12}$$

Podle naměřených dat závisí zápach na výživě takto:

Výživa v	1x denně	2x denně	3x denně	5x denně
Zápach z	3 p	12 p	27 p	75 p

Kdyby $n = 1$, muselo by platit

$$\frac{z}{v} = konst = \frac{3}{1} = \frac{12}{2} = \frac{27}{3} = \frac{75}{5} \tag{13}$$

Každý okamžitě vidí, že rovnosti ve výrazu **13** nejsou splněny ani omylem a $n \neq 1$. Zkusme $n = 2$:

$$\frac{z}{v^2} = konst = \frac{3}{1} = \frac{12}{4} = \frac{27}{9} = \frac{75}{5} \tag{14}$$

Tyto rovnosti už platí, takže

$$z = konst \cdot v^2, \tag{15}$$

kde konstanta *konst* v sobě ukrývá ostatní vlastnosti kočky, které se v tomto pokusu neměnily.
Závislost zápachu z na četnosti mytí r zjistíme z pokusu se šimpanzem. Tentokrát vidíme, že zápach je nepřímo úměrný nějaké mocnině četnosti umývání, tedy

$$z = \frac{konst}{r^n}, \tag{16}$$

kde n zatím neznáme a může nabývat hodnot 1, 2, 3, ... Naměřená data jsou připomenuta v následující tabulce:

Mytí (r)	1x měsíčně	3x měsíčně	4x měsíčně	24x měsíčně
Zápach z	24 p	8 p	6 p	1 p

Podobně jako v předchozím případě zkusíme nejprve za m dosadit 1:

$$zr^m = konst = 24 \cdot 1 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 24 \cdot 1 \tag{17}$$

Všechny rovnosti **17** platí, takže

$$z = \frac{konst}{r}, \tag{18}$$

kde konstanta *konst* v sobě zahrnuje ostatní vlastnosti zvířátka, které se během pokusu neměnily.
Shrňme si dosavadní poznatky: spojením rovnic **15** a **18** dostaneme, že pro každé zvíře se stálou hmotností platí

$$z = konst\frac{v^2}{r} \tag{19}$$

Vliv hmotnosti zatím neznáme a k jeho odhalení nám dopomůže poslední průzkum. Rovnici **19** si opět vhodně přepíšeme:

$$\frac{zr}{v^2} = konst \tag{20}$$

Dosadíme naměřená data ze zadání a pro každé testované zvířátko vypočítáme konstantu *konst*, která v sobě zahrnuje vliv hmotnosti:
Krysa: $\frac{12\cdot 3}{6^2} = 1$ pro $m = 1$.
Srna: $\frac{96\cdot 5}{4^2} = 30$ pro $m = 30$.
Lev: $\frac{900\cdot 2}{3^2} = 20$ pro $m = 200$.
Je zřejmé, že neznámá konstanta je přímo rovna hmotnosti m. Výsledný vzorec bude mít tuto podobu:

$$z = \frac{mv^2}{r} \tag{21}$$

Odpověď na druhou otázku již získáme snadno: vyjádříme si čistotnost r (kolikrát za měsíc se lev musí mýt, aby ho nevyhnali) a dosadíme hodnoty ze zadání:

$$\begin{aligned} z &= \frac{mv^2}{r} \\ r &= \frac{mv^2}{z} \\ r &= \frac{200 \cdot 5^2}{1000} \\ r &= 5 \end{aligned} \tag{22}$$

Lvovi tedy bude stačit, když se bude umývat 5x do měsíce. Jen nesmí přibrat :-)

Úloha 5B (6 bodů):
Chceme-li vědět, kolik barvy bude Filomen potřebovat, musíme nejprve zjistit povrch jeho ulity. Ta se skládá ze stočeného obdélníku a bočních stěn. Začněme obdélníkem, jehož obsah získáme součinem šířky a délky. Ze zadání známe šířku (7 cm) a druhý rozměr dopočítáme jako součet délek pěti čtvrtkružnic. Délka čtvrtkružnice se spočítá dle vzorce

$$O_c = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}, \tag{23}$$

kde r značí poloměr. Obsah celého obdélníku poté dostaneme jako

$$\begin{aligned} S_1 &= 7 \cdot \left(\frac{1\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} + \frac{8\pi}{2} \right) \text{ cm}^2 = \\ &= 7 \cdot \left(\frac{19\pi}{2} \right) \text{ cm}^2 \doteq \\ &\doteq 208{,}92 \text{ cm}^2 \end{aligned} \tag{24}$$

Obsah boční stěny získáme jako součet obsahu obdélníku (o stranách 2 a 3 cm) a tří čtvrtkružnic o poloměrech 3 cm, 5 cm a 8 cm. Obsah čtvrtkružnice spočítáme dle vzorce

$$S_c = \frac{\pi r^2}{4} \tag{25}$$

Obsah boční stěny je pak

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \cdot 3 + \frac{3^2\pi}{4} + \frac{5^2\pi}{4} + \frac{8^2\pi}{4} \text{ cm}^2 = \\ &= 6 + \frac{98\pi}{4} \text{ cm}^2 \doteq \\ &\doteq 82{,}97 \text{ cm}^2 \end{aligned} \tag{26}$$

Celkový povrch ulity dostaneme jako součet obsahů obdélníku a dvou bočních stěn vynásobený dvěma, protože ulitu natíráme zvenčí i zevnitř:

$$S = 2(S_1 + 2S_2) = 2(208{,}92 + 2 \cdot 82{,}97) \text{ cm}^2 \doteq 749{,}71 \text{ cm}^2 = 0{,}074971 \text{ m}^2 \tag{27}$$

Ze zadání víme, že 1 l barvy stačí na 1 m^2 povrchu. Filomen tedy spotřebuje 0,074971 l barvy, což je po převedení na lidštější jednotky

$$0{,}074971 \text{ l} = 74{,}971 \text{ ml} \tag{28}$$

Šnek Filomen bude potřebovat 75 ml barvy.