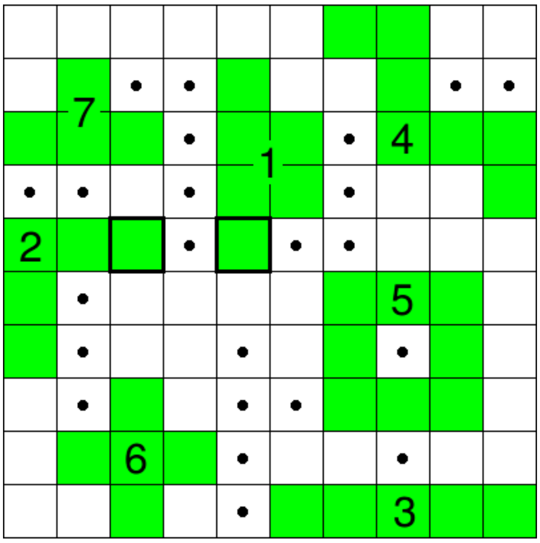
Kategorie mladší

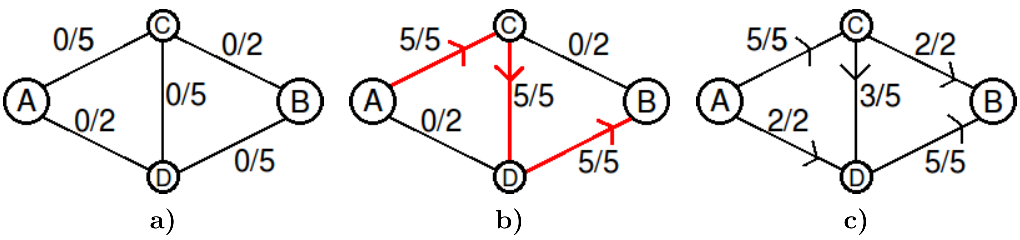
Úloha 1A (5 bodů):
Na situačním plánku ze zadání jsou dvě části nepřátelských jednotek. Štábní důstojníci naší neohrožené admirálky si mohou oddychnout, protože k oběma lze jednoznačně přiřadit tvar celé jednotky. Tím se do plánku zanesou další omezení a plánovači mohou zakreslovat další a další nepřátelské jednotky, vždy totiž existuje nějaká, kterou lze umístit jednoznačně. Výsledné rozmístění je na následujícím obrázku (čísla uvnitř bloků udávají, v jakém pořadí je bylo možné jednoznačně zakreslit do plánku):



Obrázek 1 Rozmístění vyder na jezeře

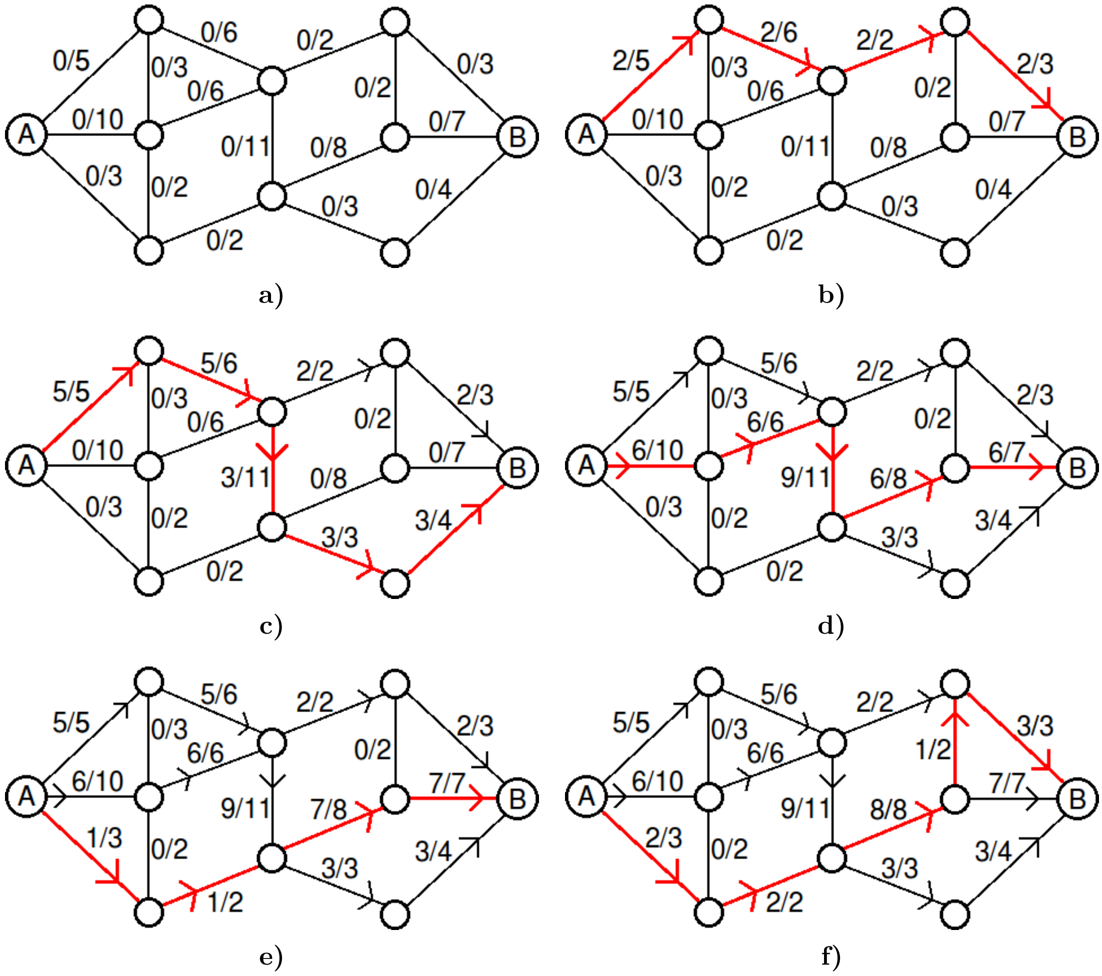
Úloha 2A (6 bodů):
Pro úspěšné vyřešení této úlohy bylo nezbytné učinit jedno důležité pozorování: nezáleží na tom, ve který den v měsíci se oslava koná, mezi daty ve dvou po sobě jdoucích měsících, které jsou v kalendáři na stejném řádku, uplyne vždy stejný počet dní (který samozřejmě závisí na délce prvního měsíce). Pro názornost a bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že se oslava koná první den v měsíci. Kdyby Helena věděla, že se oslava koná ve čtvrtek a následující měsíc v ten samý den je také čtvrtek, musel by mít tento měsíc 28 dní. Helena však ví, že následující měsíc v ten samý den je neděle, takže hledaný měsíc má 31 dní. To může být březen, duben, srpen, listopad nebo prosinec. Další měsíc v ten samý den je úterý a dvojice neděle - úterý znamená měsíc dlouhý 30 dnů. To může být únor nebo září, ale protože únor následuje po měsíci s 32 dny, měla by si Helena do svého diáře zapsat, že oslava se koná v srpnu.

Úloha 3A (7 bodů):
Při řešení této úlohy se budeme snažit postupně zvyšovat počet ježků, kteří přejdou mezi oběma hlavními městy. V každém kroku najdeme cestu (nazveme ji zlepšující), po které lze cestovat z A do B a myšleně na ni pošleme tolik ježků, kolik je zbývající kapacita nejužší silnice. Jestliže už žádná zlepšující cesta neexistuje (každá cesta z A do B obsahuje úsek s vyčerpanou kapacitou), je úloha vyřešena. Někdy se může stát, že sice nalezneme zlepšující cestu, ale na některých úsecích bychom museli vyslat ježky proti dosavadnímu proudu. V takovém případě stačí na dotyčných úsecích odečíst počet nových ježků od těch, kteří tudy již myšleně cestují. Představme si např. jednoduchou silniční síť na obrázku 2 a). První číslo u každé cesty značí počet ježků, kteří po ní projdou podle aktuálního plánu (na začátku samozřejmě 0) a druhé číslo je maximální počet ježků, kteří po ní mohou projít během jednoho dne.



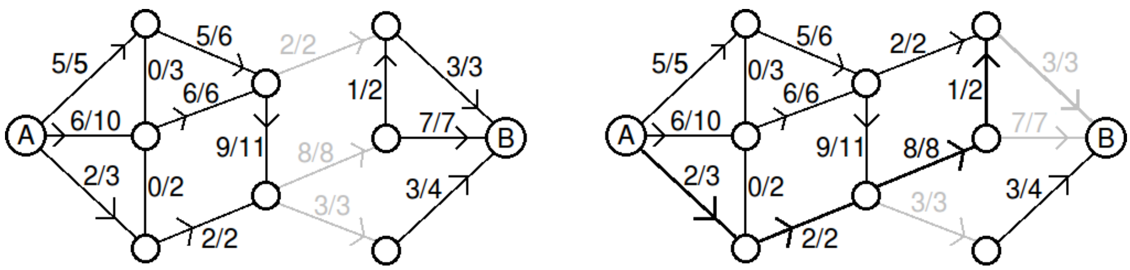
Obrázek 2 Jednoduchá silniční síť

Jedna zlepšující cesta je třeba A - C - D - B (naznačeno červeně), po které může za den projít 5 ježků. Zdá se, že kapacity všech tří silnic jsou vyčerpané, ale každý jistě vidí, že po této silniční síti může za den projít z A do B ne 5, ale 7 ježků. Další zlepšující cesta je A - D - C - B, po které můžeme poslat 2 ježky a zbývající kapacity se změní jako na obrázku 2 c). Samozřejmě to neznamená, že v úseku C - D projde 5 ježků jedním směrem a dva opačným: dva ježci půjdou po cestě A - C - B, tři po A - C - D - B a další dva po A - D - B.
Přejděme nyní zpět k silniční síti ze zadání. Protože obrázek vydá za tisíc slov, ukážeme postupné hledání zlepšujících cest graficky:



Obrázek 3 Silniční síť ze zadání

Po pěti krocích jsme se dostali do stavu, kdy žádnou další zlepšující cestu nelze nalézt. Za jeden den lze z hlavního města Království zvířat převézt do království Făgăraş 13 jablek.
Mosfetovi loupežníci řeší přesně opačný úkol: které cesty zabarikádovat, aby se obchod s jablky zastavil a zároveň součet kapacit zatarasených cest byl co nejmenší? Zřejmě takové, jejichž kapacita je vyčerpána. V tomto konkrétním případě mají loupežníci dvě možnosti:



Obrázek 4 Zatarasené cesty

Povšimněte si, že v obou případech se součet kapacit zatarasených cest rovná počtu ježků, kteří by jinak mohli cestovat z A do B. To není náhoda, tato rovnost platí pro libovolnou jinou silniční síť.

Úloha 4A (9 bodů):

Postupně projdeme všechny mágovy pokyny a vysvětlíme si, jaký mají efekt:

Myslete si libovolné číslo mezi 1 a 12 a jděte o tento počet kroků po směru nebo proti směru hodinových ručiček.

Na začátku začínají diváci na libovolném čísle a posunou se o libovolný počet kroků (nejvýše o 12) libovolným směrem a mohou tedy skončit kdekoli. Tento pokyn nemá žádný význam a slouží jen pro zmatení důvěřivých diváků.

Stojíte-li na lichém čísle, jděte o 1, 3 nebo 5 políček po nebo proti směru hodinových ručiček. Pokud stojíte na sudém čísle, jděte o 2, 4 nebo 6 políček po nebo proti směru hodinových ručiček.

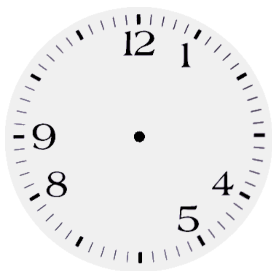
V tomto kroku Květoslav využívá známého faktu, že součet dvou lichých čísel je číslo sudé a součet dvou sudých čísel je rovněž sudý. Všichni diváci nyní musí stát na sudém čísle.

Jděte po směru hodinových ručiček o tolik kroků, na jakém čísle právě stojíte.

Kdyby Květoslav předváděl své kouzlo na večírku Jednoty českých matematiků a fyziků, mohl by pokyn formulovat i takto: „Vynásobte číslo, na kterém právě stojíte, dvěma a jděte na zbytek po dělení tohoto výsledku dvanácti.“ Jelikož víme, že před tímto pokynem stojí všichni diváci na sudém čísle, vynásobením dvěma dostanou číslo dělitelné čtyřmi a protože je 12 také dělitelné čtyřmi, bude i nové číslo dělitelné čtyřmi. Kdo stál na dvojce půjde na čtyřku, diváci stojící na čtyřce se přesunou na osmičku, ze šestky půjdou na dvanáctku, z osmičky na čtyřku, z desítky na osmičku a z dvanáctky na dvanáctku.

„Nyní vím, že nejste na dvojce ani na trojce, takže tato dvě čísla odstraním. Určitě také nestojíte na číslech 6 nebo 7, takže i tuto dvojici odeberu. A protože nemám rád dvouciferná čísla, odeberu i 10 a 11.“

Květoslav má jistě své důvody, proč odebral čísla která odebral. Upravený ciferník bude vypadat takto:



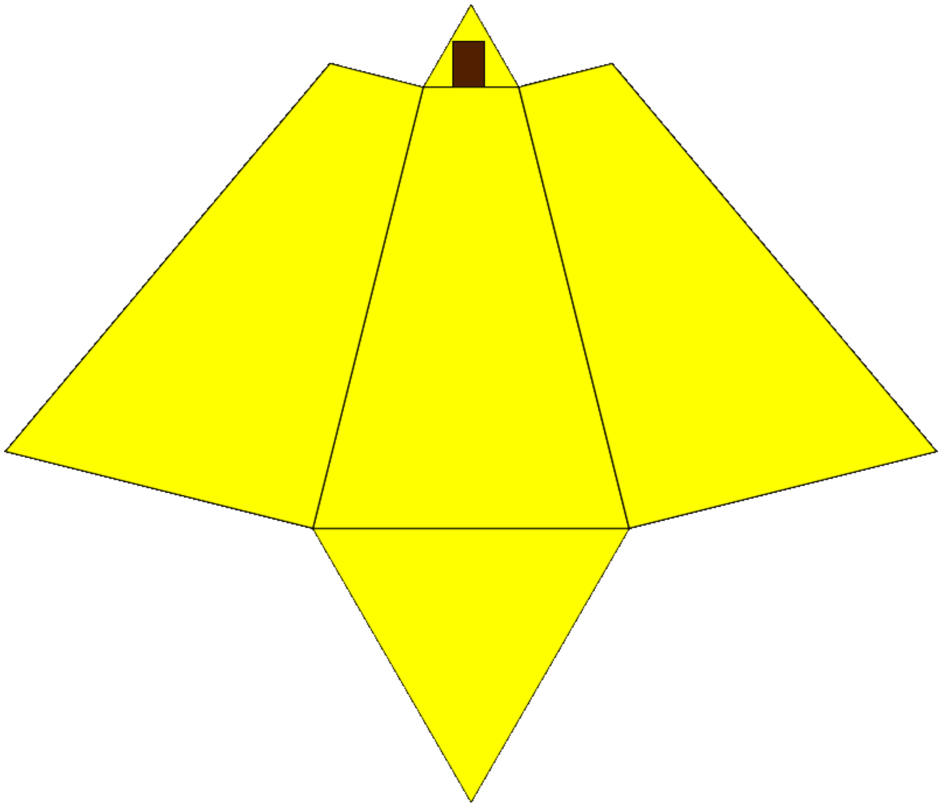
Obrázek 5
Upravený ciferník

Jděte po směru hodinových ručiček o tolik kroků, jaké je číslo těsně před tím, na kterém právě stojíte (pozor, některá čísla byla odebrána).

Diváci stojící na čtyřce se přesunou na pětku, kdo stál na osmičce se dostane také na pětku a z dvanáctky se diváci překvapivě také dostanou na pětku. Po nezbytném magickém zaříkávadle tak Květoslav prohlásí, že diváci stojí na čísle 5.

Úloha 5A (5 bodů):

Naštěstí pro dělníky se Petřino doupě skládá jen z pěti stěn (včetně podlahy), takže nakreslit plášť v jednom kuse je velmi jednoduché. Stačí k sobě jednotlivé díly přiložit stejně dlouhými hranami a výsledek může vypadat třeba takto:



Obrázek 6 Plášť doupěte

Kategorie starší

Úloha 1B (5 bodů):
Protože je zastupitelů málo, můžeme si vypsat všechny případy a najít takové, ve kterých není porušen žádný požadavek. Abychom se neztratili v záplavě textu, označíme si fontánu jako f, o bude znamenat orloj a p pomník. Namísto postavit budeme psát 1 a nepostavit bude zastupovat 0:

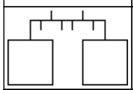
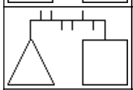
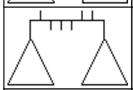
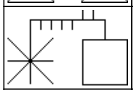
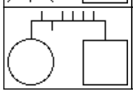
f	o	p	Radní 1	Radní 2	Radní 3
0	0	0	pro	pro	pro
0	0	1	pro	proti	pro
0	1	0	pro	pro	proti
0	1	1	pro	proti	pro
1	0	0	proti	pro	pro
1	0	1	proti	proti	pro
1	1	0	pro	pro	proti
1	1	1	pro	proti	pro

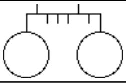
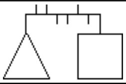
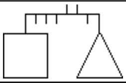
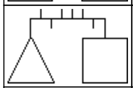
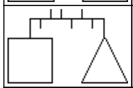
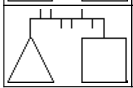
Starosta se může rozhodnout jen tak, aby všichni radní souhlasili, a to znamená, že nepostaví nic. Ve druhé části úlohy chce majitel firmy stavící orloje uplacením jednoho radního dosáhnout toho, aby svůj požadavek stáhnul a starosta se mohl rozhodnout jedině pro orloj. Stažení požadavku způsobí, že dotyčný radní bude vždy pro. Znamená to, že nemá cenu uplácet prvního a druhého radního, ti souhlasí se stavbou orloje i bez úplatku. Uplatí-li třetího radního, změní se situace takto:

f	o	p	Radní 1	Radní 2	Radní 3
0	0	0	pro	pro	pro
0	0	1	pro	proti	pro
0	1	0	pro	pro	pro
0	1	1	pro	proti	pro
1	0	0	proti	pro	pro
1	0	1	proti	proti	pro
1	1	0	pro	pro	pro
1	1	1	pro	proti	pro

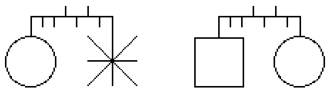
Možná rozhodnutí jsou nepostavit nic, pouze orloj nebo fontána a orloj. Druhá možnost sice vyhovuje, ale stále zůstávají ve hře varianty, které majitel firmy stavící orloje nechce. Odpověď tedy zní, že uplacením libovolného radního nelze donutit starostu, aby se mohl rozhodnout jedině pro orloj a nic jiného.

Úloha 2B (6 bodů):
Třebaže mají vyšetřovatelé k dispozici návod, jak tajné písmo číst, musí postupovat velmi pečlivě, jakákoli chyba může způsobit zkomolení zprávy. Připomeňme, že velké kolečko značí číslici 0, čtverec 1, trojúhelník 2, hvězda 3, čárka na můstku směřující nahoru zastupuje jedničku a čárka směřující dolů nulu. Všechny znaky zprávy převedeme na čísla a následně dvojice písmen:

	a	b	c	d	e	f	g	h	$x = 64(3a+b)+32c+16d+8e+4f+2g+h$	
	1	1	0	1	0	0	1	0	$64(3\cdot1+1)+32\cdot0+16\cdot1+8\cdot0+4\cdot0+2\cdot1+0=274=26\cdot10+14$	KO
	2	1	1	1	0	0	1	0	$64(3\cdot2+1)+32\cdot1+16\cdot1+8\cdot0+4\cdot0+2\cdot1+0=498=26\cdot19+4$	TE
	2	2	1	0	0	0	1	1	$64(3\cdot2+2)+32\cdot1+16\cdot0+8\cdot0+4\cdot0+2\cdot1+1=547=26\cdot21+1$	VB
	3	1	0	0	0	0	1	1	$64(3\cdot3+1)+32\cdot0+16\cdot0+8\cdot0+4\cdot0+2\cdot1+1=643=26\cdot24+19$	YT
	0	1	1	0	1	1	1	1	$64(3\cdot0+1)+32\cdot1+16\cdot0+8\cdot1+4\cdot1+2\cdot1+1=111=26\cdot4+7$	EH

	a	b	c	d	e	f	g	h	$x = 64(3a+b)+32c+16d+8e+4f+2g+h$	
	0	0	1	0	0	0	1	0	$64(3\cdot0+0)+32\cdot1+16\cdot0+8\cdot0+4\cdot0+2\cdot1+0=34=26\cdot1+8$	BI
	2	1	1	1	0	0	1	0	$64(3\cdot2+1)+32\cdot1+16\cdot1+8\cdot0+4\cdot0+2\cdot1+0=498=26\cdot19+4$	TE
	1	2	0	0	0	1	1	0	$64(3\cdot1+2)+32\cdot0+16\cdot0+8\cdot0+4\cdot1+2\cdot1+0=326=26\cdot12+14$	MO
	2	1	1	0	1	1	1	0	$64(3\cdot2+1)+32\cdot1+16\cdot0+8\cdot1+4\cdot1+2\cdot1+0=494=26\cdot19+0$	TA
	1	2	0	1	1	0	1	0	$64(3\cdot1+2)+32\cdot0+16\cdot1+8\cdot1+4\cdot0+2\cdot1+0=346=26\cdot13+8$	NI
	2	1	1	1	0	0	1	0	$64(3\cdot2+1)+32\cdot1+16\cdot1+8\cdot0+4\cdot0+2\cdot1+0=498=26\cdot19+4$	TE

Zpráva zní: „Kotě v bytě hbitě motá nitě“.
Odpověď na otázku, zda mohou existovat dva různé symboly zastupující stejnou dvojici písmen, je už snadná: mohou. Příkladem jsou např. tyto dva zastupující písmena HU:



Oba se shodují v rozložení čárek na můstku, avšak liší se v piktogramech: kolečko - hvězdička znamená $a = 0$, $b = 3$ a hodnotu příslušné závorky $3a + b = 3 \cdot 0 + 3 = 3$, zatímco čtvereček hvězdička znamená $a = 1$, $b = 0$ a hodnotu příslušné závorky $3a + b = 3 \cdot 1 + 0 = 3$.

Úloha 3B (7 bodů):
Chceme-li dokázat pravdivost nějakého tvrzení začínajícího „pro všechna x platí, že …“, musíme jej dokázat skutečně pro všechna x, nestačí si dosadit několik konkrétních hodnot. Naopak, když chceme takové tvrzení vyvrátit, stačí najít jediný protipříklad. Výjimka pravidlo nepotvrzuje, ale naopak vyvrací. Kterou cestou se vydat nám však nikdo neřekne, matematické důkazy jsou zkrátka tvůrčí činnost. Projdeme postupně všechny vlastnosti rozumného tarifu a podíváme se, zda je má i Pavlův návrh.
Cena lístku mezi $[x_1, y_1]$ a $[x_1, y_1]$ je rovna 0.
Podle Pavla by se cena lístku mezi ostrovy $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$ počítala jako menší z čísel $(x_1 - x_2)^2$ a $(y_1 - y_2)^2$. Pokud jsou oba ostrovy stejné, bude cena lístku menší z čísel $(x_1 - x_1)^2 = 0$ a $(y_1 - y_1)^2 = 0$, tedy 0. Protože jsme o souřadnicích x_1 a y_1 nic nepředpokládali, splňuje Pavlův tarif první podmínku pro libovolný ostrov.
Jestliže jsou ostrovy $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$ různé, měla by být cena lístku ostře větší než 0.
Ani jeden z výrazů $(x_1 - x_2)^2$ a $(y_1 - y_2)^2$ nemůže být díky druhé mocnině záporný. I pro dva různé ostrovy však jeden může být nulový, např. $[x_1, y_1] = [10, 10]$, $[x_2, y_2] = [10, 20]$. Přestože se jedná o dva různé ostrovy, podle Pavlova návrhu by měl být lístek zdarma. Druhou podmínku tedy Pavlův tarif nesplňuje.
Cena lístku pro cestu mezi ostrovy $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$ je stejná jako pro cestu opačným směrem (z $[x_2, y_2]$ na $[x_1, y_1]$).
Cena lístku pro cestu tam je menší z čísel $(x_1 - x_2)^2$, $(y_1 - y_2)^2$ a cena lístku pro zpáteční cestu je díky druhé mocnině menší z čísel $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$, $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$. Obě ceny jsou stejné pro libovolné dva ostrovy, takže tuto podmínku Pavlův tarif splňuje.
Přímá cesta je levnější nebo nejhůře stejně drahá jako cesta s jedním přestupem, tedy pro libovolné tři ostrovy $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ a $[x_3, y_3]$ platí, že součet cen lístků mezi $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ a $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$ je větší nebo roven ceně lístku mezi $[x_1, y_1]$ a $[x_3, y_3]$.
Narazíme-li na nějaké složitější tvrzení začínající „pro všechna x platí, že …“, o kterém nevíme, zda platí či nikoli, bývá dobrou strategií se jej nejdříve pokusit vyvrátit, tedy najít protipříklad. Zkusíme to i teď. Představme si, že cestujeme z ostrova $[0, 0]$ na $[10, 10]$. Podle Pavlova tarifu by cena lístku byla menší z čísel $(0 - 10)^2 = 100$ a $(0 - 10)^2 = 100$, tedy 100. To je jistě rozumná cena, avšak jen do chvíle, než si spočítáme cenu s přestupem na ostrově $[0, 10]$: lístek z $[0, 0]$ na $[0, 10]$ by stál 0 a lístek z $[0, 10]$ na $[10, 10]$ také 0. Jelikož není pravda, že $100 \leq 0 + 0$, ani čtvrtou podmínku rozumného tarifu Pavlův návrh nesplňuje.
Pavlův návrh splňuje první a třetí podmínku rozumného tarifu, avšak druhou a čtvrtou nesplňuje.

Úloha 4B (9 bodů):

Ve shodě s nápovědou budeme každou velkou závorku řešit zvlášť. Výraz v první závorce je roven nule tehdy a jen tehdy, je-li splněna rovnice

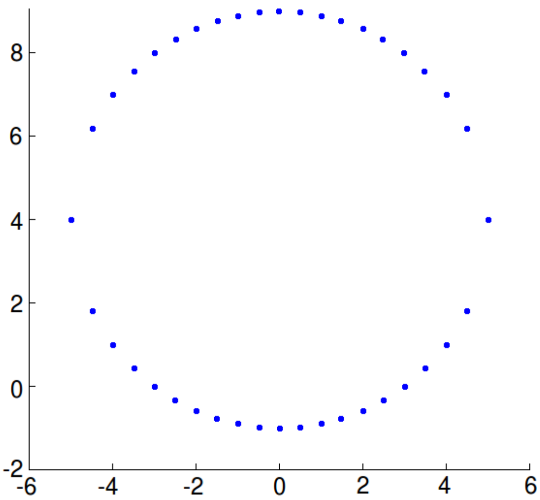
$$x^2 + (y-4)^2 - 25 = 0 \tag{1}$$

Protože jsou proměnné x a y na jedné straně, říkáme, že rovnice je v implicitním tvaru. Po úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} (y-4)^2 &= 25 - x^2 \\ y - 4 &= \pm\sqrt{25 - x^2} \\ y &= \pm\sqrt{25 - x^2} + 4 \end{aligned} \tag{2}$$

Před odmocninou na pravé straně musí být $\pm$. První řádek má totiž tvar rovnice $a^2 = b$, jejímž řešením je nejen $a = \sqrt{b}$, ale také $a = -\sqrt{b}$ (dosaďte si např. za $b = 9$ a za $a = 3$, $a = -3$). Různé dvojice bodů $[x, y]$, ve kterých je rovnice 1 splněna, získáme postupným dosazováním různých čísel za x a výpočtem odpovídajících y. Avšak ne pro všechna x lze y vypočítat. Určitě si pamatujete, že odmocnina záporného čísla není v reálných číslech definovaná. Pro jaká x platí $25 - x^2 \geq 0$? Po malé úpravě dostaneme nerovnici $25 \geq x^2$. Číslo 25 je 5^2 nebo také $(-5)^2$. Po dosazení za x libovolného čísla z intervalu $\langle -5, 5\rangle$ je nerovnice $25 \geq x^2$ splněna a jinde nikoli. Vrátíme se k rovnici 2, budeme do ní postupně dosazovat různá $x \in \langle -5, 5\rangle$, dopočítávat y a získané body $[x, y]$ vyneseme do grafu:

$[x, y]$	$[x, y]$	$[x, y]$	$[x, y]$
[-5; 4]	[0,5; 8,97]	[-4; 1]	[1,5; -0,77]
[-4,5; 6,18]	[1; 8,90]	[-3,5; 0,43]	[2; -0,58]
[-4; 7]	[1,5; 8,77]	[-3; 0]	[2,5; -0,33]
[-3,5; 7,57]	[2; 8,58]	[-2,5; -0,33]	[3; 0]
[-3; 8]	[2,5; 8,33]	[-2; -0,58]	[3,5; 0,43]
[-2,5; 8,33]	[3; 8]	[-1,5; -0,77]	[4; 1]
[-2; 8,58]	[3,5; 7,57]	[-1; -0,90]	[4,5; 1,82]
[-1,5; 8,77]	[4; 7]	[-0,5; -0,97]	
[-1; 8,9]	[4,5; 6,18]	[0; -1]	
[-0,5; 8,97]	[5; 4]	[0,5; -0,97]	
[0; 90]	[-4,5; 1,82]	[1; -0,90]	



Obrázek 7 Řešení první závorky

Výsledkem je kružnice se středem v bodě $[0, 4]$ o poloměru $r = 5$. Rovnice 1 totiž není nic jiného než speciální případ rovnice kružnice se středem v bodě $[m, n]$ o poloměru r:

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 \tag{3}$$

Nepřipomíná vám náhodou rovnice 3 Pythagorovu větu? Vybaveni novými znalostmi nakreslíme řešení druhé a třetí velké závorky levou zadní:

$$(x+2)^2 + (y-6)^2 = 1 \tag{4}$$

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 1 \tag{5}$$

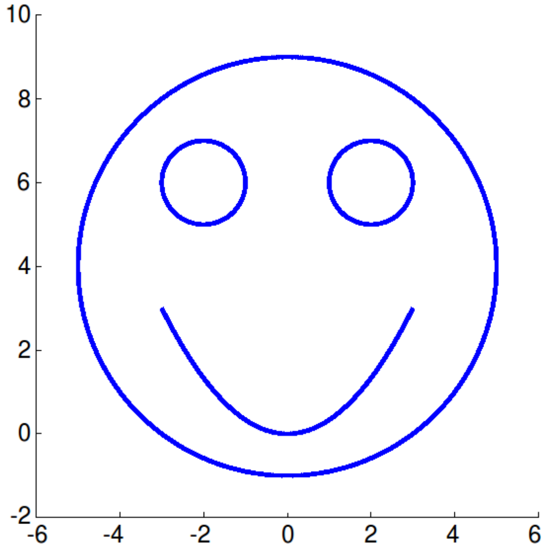
Rovnice 4 je splněna v bodech, kderé dohromady tvoří kružnici se středem v bodě $[-2, 6]$ o poloměru 1 a řešení rovnice 5 je kružnice se středem v bodě $[2, 6]$ o poloměru 1. Zbývá nakreslit poslední závorku:

$$\begin{aligned} 3y - x^2 &= 0 \\ y &= \frac{x^2}{3} \end{aligned} \tag{6}$$

V zadání je navíc poznámka, že máme brát jen takové body splňující rovnici 6, jejichž x-ová složka leží v intervalu $\langle -3, 3\rangle$. Výsledkem je křivka, které se říká parabola. Množina bodů, která řeší celou rovnici

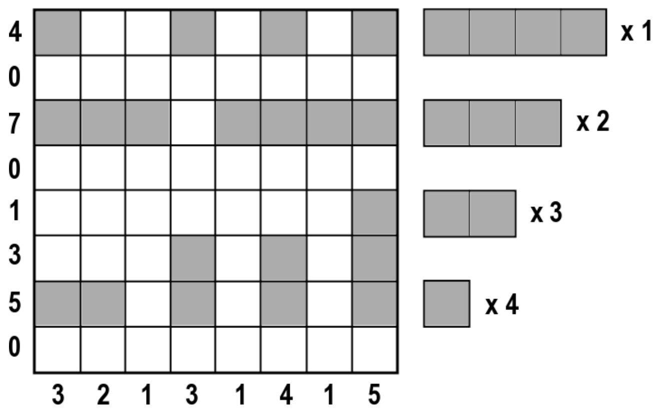
$$\left(x^2+(y-4)^2-25\right)\cdot\left((x+2)^2+(y-6)^2-1\right)\cdot\left((x-2)^2+(y-6)^2-1\right)\cdot\left((3y-x^2)_{|-3\leq x\leq 3}\right)=0 \tag{7}$$

je na následujícím obrázku:



Obrázek 8 Řešení příkladu

Úloha 5B (5 bodů):
Všimněme si třetího řádku: na osmi políčkách má být sedm částí ponorek. Protože zároveň známe jejich velikosti, v tomto řádku musí být jedna ponorka délky 4 a jedna délky tři, jen nevíme, která bude nalevo a která napravo. Na prvních třech a posledních třech políčkách v tomto řádku však musí být ponorky. Díky tomu nyní známe všechny pozice ponorek ve třetím a sedmém sloupci a všechna osatní políčka můžeme označit jako vodu. Takto můžeme pokračovat, dokud nejsou všechna políčka obarvena (bílá = voda, šedá = ponorka):



Obrázek 9 Řešení příkladu