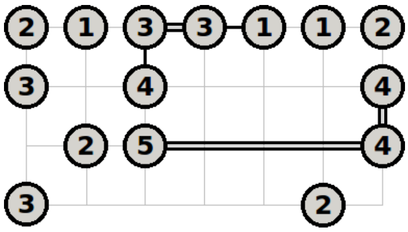
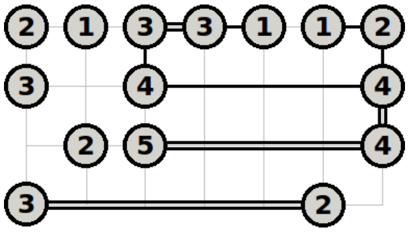
Kategorie mladší

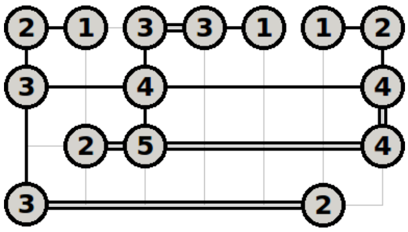
Úloha 1A (5 bodů):
Všimněme si nejprve dvou jedniček v pravém horním rohu plánku. Kdybychom je spojili mostem, vytvořili bychom oddělený ostrov a porušili tak jednu z podmínek zadání. Levou jedničku tedy spojíme mostem s trojkou nalevo od ní. Tato trojka už sousedí jen s jednou další krou (shodou okolností další trojkou), takže je musíme propojit dvěma mosty. Abychom předešli vytvoření dalšího izolovaného ostrova, spojíme tuto trojku jedním mostem se čtyřkou pod ní. Dále si všimněme čtyřky vpravo dole. Bezprostředně sousedí jen se dvěma dalšími krami, takže nemáme jinou možnost, než ji propojit dvěma mosty se čtyřkou nad ní a postavit dva mosty k pětce nalevo.



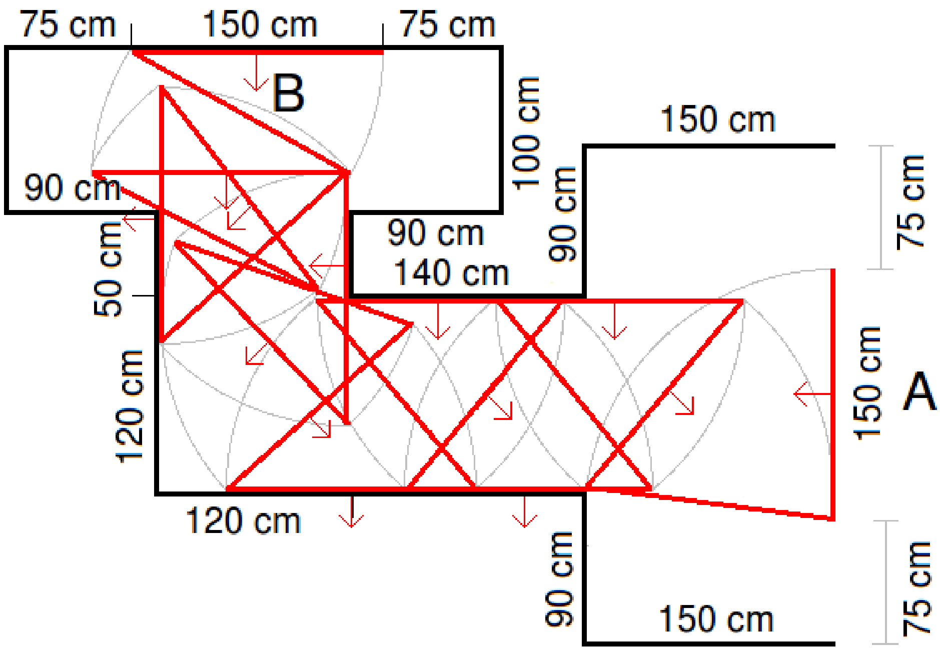
Nejjednodušší způsob, jak postavit mosty z dvojky v pravém horním rohu, je postavit jeden k jedničce nalevo od ní a jeden ke čtyřce o políčko níže. Této čtyřce tak chybí jediný most a jediná možnost je postavit ho ke kře ležící o 4 políčka nalevo od ní. Kra označená číslem 2 vpravo dole má jediného volného souseda (trojku v levém dolním rohu), takže jediná možnost, jak ji spojit se světem, je postavit do rohu dva mosty.



Trojce v levém dolním rohu zbývá jediný most, a tak ji spojíme s trojkou ležící o dvě políčka nad ní. Po několika krocích se už snadno dobereme ke konečnému výsledku:



Úloha 2A (6 bodů):
Tato úloha nevyžadovala žádné velké přemýšlení, ale spíše trpělivou práci s pravítkem a kružítkem. Vašek si jen musí dávat pozor, aby nedonesl zrcadlo do spižírny čelem ke zdi, ale protože se uvnitř dokáže otočit, takový problém by ho jen trochu zdržel. Možné řešení je načrtnuto na následujícím obrázku:



Úloha 3A (7 bodů):
Podle zadání jsou ve skladu dvě kola, čtyři koloběžky a jeden parní válec a zvířátka mají následující preference:
Olga: Kolo, koloběžka, parní válec
Andrea: Koloběžka, kolo, parní válec
Marek: Parní válec, koloběžka, kolo
Marie: Kolo, parní válec, koloběžka
Lubor: Parní válec, kolo, koloběžka
Ondřej: Kolo, parní válec, koloběžka
Vítek: Koloběžka, parní válec, kolo

Protože je koloběžek dostatek, můžeme je Andree a Vítkovi bez výčitek půjčit. Parní válce se však nedostávají, buď Marek nebo Vítek se budou muset spokojit s jiným dopravním prostředkem. Zkusme nejprve Luborovi dát parní válec a Markovi koloběžku (koloběžek je přebytek a Markovi tolik nevadí, proto zkoušíme nejprve tuto možnost). V seznamu zbydou Olga, Marie a Ondřej. Všichni by chtěli jet na kole, ale ve skladu zbývají jen dvě a jedna koloběžka. Necháme-li jet Olgu na koloběžce a Marii a Ondřeje na kole, dosáhneme pomyslného celkového užitku 19 z 21 možných. Jelikož budou vždy alespoň dvě zvířátka nespokojená, představuje 19 největší možný užitek a dopravní prostředky rozdělíme mezi zvířátka takto:
Olga: Koloběžka
Andrea: Koloběžka
Marek: Koloběžka
Marie: Kolo
Lubor: Parní válec
Ondřej: Kolo
Vítek: Koloběžka

Úloha 4A (9 bodů):
Liší se výsledná obydlí, pokud mravenec A žádá o ruku mravence B od případu, kdy B žádá o ruku A, nebo jsou stejná? Požádá-li A a ruku B, výšky sloupů (hloubky jam) u nového příbytku budou

$$A+B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \tag{1}$$

Pokud si B vezme mravence A, výšky sloupů (hloubky jam) u nového příbytku budou

$$B+A=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{pmatrix}=A+B \tag{2}$$

Obydlí budou stejná, pokud jde o svatbu, jsou zřejmě mravenci rovnoprávní.
Představme si, že mravenec si A vezme B a potom jejich obydlí udělí král vyznamenání ve výši m. Bude výsledné obydlí vypadat stejně jako kdyby král nejprve udělil vyznamenání ve výši m mravenci A i B a teprve potom se oba vzali? V prvním případě (nejdříve svatba, pak vyznamenání) budou výšky sloupů u nového příbytku

$$m(A+B)=m\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m(a+e) & m(b+f) \\ m(c+g) & m(d+h) \end{pmatrix} \tag{3}$$

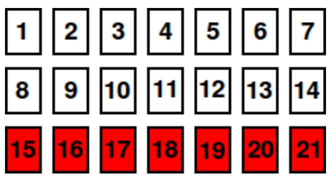
a ve druhém případě

$$mA+mB=m\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+m\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} me & mf \\ mg & mh \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m(a+e) & m(b+f) \\ m(c+g) & m(d+h) \end{pmatrix}=m(A+B) \tag{4}$$

Na pořadí svatby a vyznamenání nezáleží, zdá se, že i dědictví mají mravenci vyřešeno spravedlivě.
Jakou výši musí mít vyznamenání, aby se dotčené obydlí nezměnilo? Protože pro libovolné číslo x platí $1 \cdot x = x$, musí mít nic neměnící vyznamenání hodnotu $m = 1$.
Jak musí vypadat obydlí mravence A, aby vezme-li si libovolného mravence B, vypadalo výsledné obydlí stejně jako původní přístřešek B? Všechny sloupy obydlí chudáka mravence A musí být vysoké 0. Ať už si A vezme kohokoli, po svatbě bude jejich obydlí

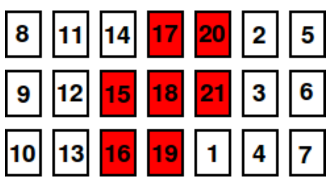
$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0+e & 0+f \\ 0+g & 0+h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \tag{5}$$

Úloha 5A (5 bodů):
Keporkak Květoslav možná kouzlit umí, ale při triku s 21 kartami se bez magie bez problémů obejde. Princip kouzla si ukážeme na příkladu: mysleme si např. kartu č. 16. Leží-li karty na stole podobně jako na obrázku 1, musíme poctivě ukázat na třetí řádek:



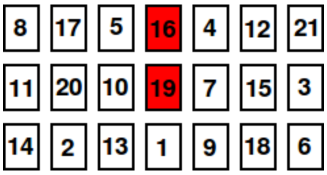
Obrázek 1 Počáteční stav

Květoslav karty složí do jednoho balíčku, avšak ne náhodným způsobem: první vezme hromádku, na kterou jsme NEukázali (v našem případě třeba prostřední řádek), pak tu naši a nakonec tu zbylou (první řádek). Neví sice, jakou kartu máme na mysli, ale nyní ví, že se nachází mezi sedmi kartami uprostřed balíčku. Potom karty opět rozloží do tří hromádek: první kartu dá na první hromádku, druhou kartu na druhou hromádku, třetí na třetí, čtvrtou opět na první, pátou na druhou atd:



Obrázek 2 Po prvním rozložení

Znovu poctivě ukážeme na třetí řádek, Květoslav karty opět složí (tentokrát vezme nejdříve třeba první řádek, na něj musí dát karty ze třetího řádku a navrch balíčku položí karty ze druhého řádku). Stále nemá tušení jakou kartu máme na mysli, ale v tomto kroku omezil počet možných karet na nejvýše tři (v našem případě dokonce dvě) a navíc ví, že jsou v balíčku na 10., 11. a 12. místě. Když nyní naposledy vyloží karty na stůl, naše karta se musí nacházet uprostřed některého z řádků:



Obrázek 3 Po druhém rozložení

Ukážeme na příslušný řádek, Květoslav karty složí do jednoho balíčku a naše karta se nachází přesně uprostřed, tedy na 11. místě.

Kategorie starší

Úloha 1B (5 bodů):
Chce-li oslík prodat všechny hrušky a zároveň co nejvíce vydělat, měl by zvolit takovou cenu c, při které prodá podle jeho předpokladů právě $p = 100$ kg:

$$\begin{aligned} p &= \frac{400}{3} - \frac{4}{3}c \\ 3p &= 400 - 4c \\ 4c &= 400 - 3p \\ c &= \frac{400 - 3p}{4} \\ c &= \frac{400 - 3 \cdot 100}{4} = 25 \end{aligned} \tag{6}$$

Bude-li oslík prodávat hrušky za cenu 25 Kč za kilogram, prodá za léto všechny své přebytky a utrží celkem

$$pc = \frac{400}{3}c - \frac{4}{3}c^2 = 2500 \text{ Kč} \tag{7}$$

Kdyby zvolil menší cenu, prodal by rovněž 100 kg (více hrušek nemá) a utržil o něco méně, avšak co kdyby prodával hrušky třeba za 30 Kč za kilogram? Potom za léto prodá

$$p = \frac{400}{3} - \frac{4}{3}c = 93,3 \text{ kg} \tag{8}$$

a utrží (dosadíme cenu 30 Kč do vzorce 7)

$$pc = \frac{400}{3}c - \frac{4}{3}c^2 = 2800 \text{ Kč.} \tag{9}$$

Nejvíce by však utržil při ceně 50 Kč za kilogram (prodá 66,6 kg za 3333 Kč, dalším zvyšováním ceny už vydělá méně). Bohužel, ne vždy je přání zákazníka na prvním místě.

Úloha 2B (6 bodů):
Začneme druhou otázkou, protože je jednodušší. Všechny veličiny stačí převést na správné jednotky a dosadit do vzorce ze zadání. Na palubních hodinách uběhne 1 hodina, takže $t_0 = 3600$ s, rychlost v bude $v = 90$ kmh^{-1} $= 25$ ms^{-1} a na Zemi uběhne

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3600}{\sqrt{1 - \frac{25^2}{300000000^2}}} = 3600,0000000000125 \text{ s} \tag{10}$$

Jinak řečeno 1 hodina a 12,5 pikosekundy. Takový rozdíl je měřitelný jen velmi přesnými atomovými hodinami.
Abychom dokázali zodpovědět i první otázku, vyjádříme ze vzorce proměnnou v:

$$\begin{aligned} t &= \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t^2 &= \frac{t_0^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ 1 - \frac{v^2}{c^2} &= \frac{t_0^2}{t^2} \\ \frac{v^2}{c^2} &= 1 - \frac{t_0^2}{t^2} \\ v &= c\sqrt{1 - \frac{t_0^2}{t^2}} \end{aligned} \tag{11}$$

Podle palubních hodin uběhne jedna hodina, tedy $t_0 = 3600$ s, pozorovatel na Zemi prožije celý den, $t = 86400$ s, a dosazením zjistíme, že Albert musí letět rychlostí

$$v = c\sqrt{1 - \frac{3600^2}{86400^2}} = 0,999c = 299739470\ \mathrm{ms}^{-1} \tag{12}$$

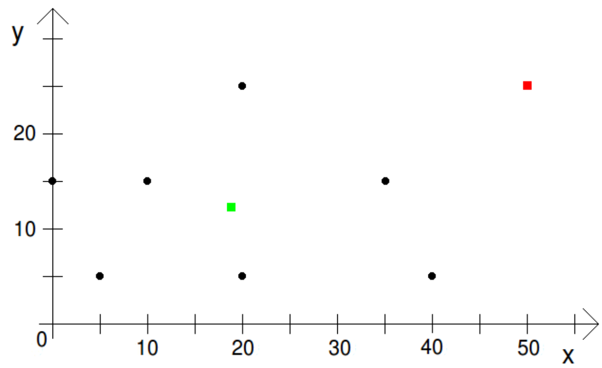
tedy téměř rychlostí světla. Kdyby opravdu celou dobu letěl rychlostí $0,999c$, dostal by se za příznivých okolností k planetě Saturn. Pro zajímavost: k hvězdě Proxima Centauri (nejbližší hvězda ke Slunci) by touto rychlostí letěl 4 roky a 3 měsíce pozemského času, zatímco sám by zestárl jen o 65 dnů.
Vzoreček ze zadání jsme si jen tak nevymysleli, je to jeden ze vztahů speciální teorie relativity publikované v roce 1905 německým fyzikem Albertem Einsteinem. V běžném životě se příliš neuplatní, pojedeme-li vlakem z Prahy do Pardubic, asi si nevšimneme, že lidé na nádraží jsou o 12 pikosekund starší než by měli být. Někdy však její vliv nelze zanedbat ani při relativně malých rychlostech. Kdyby konstruktéři navigačního systému GPS nezapočítali relativistické zpožďování palubních hodin satelitů (pohybujících se rychlostí pouhých 14000 km/h, tedy zhruba jednu stotisícinu rychlosti světla), za jeden den by chyba určení polohy narostla o 10 km!

Úloha 3B (7 bodů):
Doufejme, že si Eliška přibalila do kufru kalkulačku, protože při řešení této úlohy si opravdu započítá. V prvním kroku přiřadí hvězdy ke stávajícím středům shluků, k čemuž potřebuje znát všechny vzdálenosti mezi středy a hvězdami:

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8
$c_1 = [35; 15]$	**31,6**	**35,0**	**25,0**	**18,0**	**18,0**	**0**	**11,2**	18,0
$c_2 = [50; 25]$	49,2	51,0	41,2	36,1	30,0	18,0	22,4	**0**

Prozatím jsou tedy všechny hvězdy až na h_8 blíže shluku c_1. To se však může časem změnit, protože nyní středy shluků přepočítáme:

$$x_1 = \frac{5+0+10+20+20+35+40}{7} = 18,6 \qquad x_2 = \frac{50}{1} = 50$$
$$y_1 = \frac{5+15+15+5+25+15+5}{7} = 12,1 \qquad y_2 = \frac{25}{1} = 25$$



Obrázek 4 Středy po prvních dvou krocích

Přesně podle popisu opět přiřadíme hvězdy k jednotlivých středům. Protože se jejich poloha měnila, může výsledek dopadnout jinak než na počátku:

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8
$c_1 = [18,6; 12,1]$	**15,3**	**18,8**	**9,1**	**7,2**	**13,0**	**16,7**	22,5	33,9
$c_2 = [50; 25]$	49,1	51,1	41,2	36,1	30,0	18,0	**22,4**	**0**

Přiřazení se skutečně trochu liší. Nové středy shluků budou

$$x_1 = \frac{5+0+10+20+20+35}{6} = 15 \qquad x_2 = \frac{40+50}{2} = 45$$
$$y_1 = \frac{5+15+15+5+25+15}{6} = 13,3 \qquad y_2 = \frac{5+25}{2} = 15$$

A znovu,

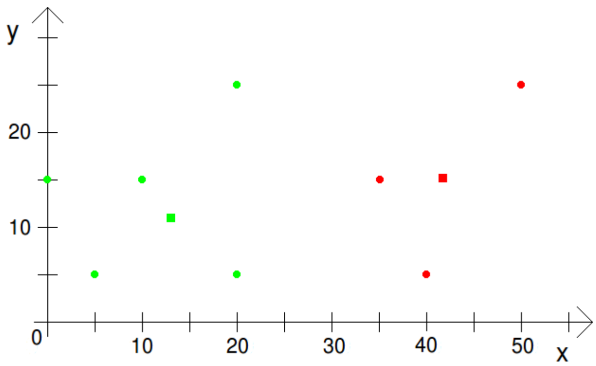
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8
$c_1 = [15; 13,3]$	**13,0**	**15,1**	**5,3**	**9,7**	**12,7**	20,1	26,4	36,9
$c_2 = [45; 15]$	41,2	45,0	35,0	26,9	26,9	**10**	**11,2**	**11,2**

Přiřazení hvězd se opět trochu změnilo, takže středy shluků přepočítáme:

$$x_1 = \frac{5+0+10+20+20}{5} = 11 \qquad x_2 = \frac{35+40+50}{3} = 41,7$$
$$y_1 = \frac{5+15+15+5+25}{5} = 13 \qquad y_2 = \frac{15+5+25}{3} = 15$$

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8
$c_1 = [11; 13]$	**10**	**11,2**	**2,2**	**12,0**	**15,0**	24,1	30,1	40,8
$c_2 = [41,7; 15]$	38,0	41,7	31,7	23,9	23,9	**6,7**	**10,1**	**13,0**

Po tomto kroku se přiřazení hvězd do jednotlivých shluků nezmění, není tedy třeba středy opět přepočítávat a úlohu můžeme prohlásit za vyřešenou. Do prvního shluku náleží hvězdy h_1, h_2, h_3, h_4 a h_5 a druhý shluk tvoří h_6, h_7 a h_8.



Obrázek 5 Konečný výsledek

Úloha 4B (9 bodů):

Z definice 2-úplného čísla vyplývá, že jeho rozklad na prvočinitele lze napsat jako

$$x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_n^{k_n} \tag{13}$$

kde p_1, p_2, ..., p_n jsou prvočísla a **všechny** exponenty k_1, k_2, ..., k_n jsou větší nebo rovny 2. Např. 125 je 2-úplné, protože $125 = 5^3$, 441 je také 2-úplné, protože $441 = 3^2 \cdot 7^2$, avšak číslo 12 2-úplné není, jeho rozklad je totiž $12 = 2^2 \cdot 3^1$ a přestože je 12 dělitelné 2 i 2^2, neplatí už, že je dělitelné 3 i 3^2. Nejdůležitější si bylo uvědomit, že podle zadání musí mít tuto vlastnost všechna prvočísla, která dané číslo dělí, proto 12 ani 20 nemohou být 2-úplná.
Přirozené číslo x je silné, je-li možné jej napsat jako n-tou mocninu nějakého jiného přirozeného čísla. To znamená, že všechna silná čísla jsou zároveň 2-úplná. Např. 441 je silné, protože $441 = 21^2$, a zároveň 2-úplné, protože $441 = 3^2 \cdot 7^2$. Co se stane, když jej vynásobíme třemi? Výsledné číslo $441 \cdot 3 = 1323$ už není silné, ale stále je 2-úplné, protože $1323 = 3^3 \cdot 7^2$. Když ale 1323 opět vynásobíme třemi, výsledek bude opět silný, neboť $1323 \cdot 3 = 3969 = 3^4 \cdot 7^2 = 63^2$. Nejobecnější postačující podmínka může znít takto: Jestliže lze rozklad čísla x na prvočinitele napsat jako

$$x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_n^{k_n} \tag{14}$$

kde p_1, p_2, ..., p_n jsou prvočísla, všechny exponenty k_1, k_2, ..., k_n jsou větší nebo rovny 2 a **největší společný dělitel exponentů k_1, k_2, ..., k_n je 1**, pak je x 2-úplné a není silné. První tři taková čísla jsou $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$, $200 = 2^3 \cdot 5^2$ a první liché je $675 = 3^3 \cdot 5^2$.

Úloha 5B (5 bodů):

Mějme náhodný pokus, který může dopadnout n způsoby a všechny výsledky jsou stejně možné. Např. hod spravedlivou kostkou může dopadnout šesti způsoby. Pravděpodobnost nějakého jevu je potom

$$p = \frac{\text{počet příznivých výsledků}}{\text{počet všech výsledků}}$$

Třeba jev „padne jednička“ má pravděpodobnost $\frac{1}{6}$, všech možných výsledků je 6 a příznivý je jen jeden (padla jednička). Nebo „padne sudé číslo“ má pravděpodobnost $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, tentokrát jsou příznivé hody 2, 4 a 6. Hod dvěma kostkami může

dopadnout 36 různými způsoby (11, 12, 13, ..., 21, 22, ..., 66), ale počet různých výsledků hry je menší, protože některé hody považujeme za nerozlišitelné. Kolika způsoby tedy může dopadnout jedno kolo hry, 36 nebo 21 (tolik je hodů rozlišitelných podle pravidel hry)? Správně je první možnost, různé výsledky hry totiž nejsou stejně možné. Např. výsledek hry 21 odpovídá hodům 21 nebo 12, zatímco výsledku 44 lze dosáhnout jen jedním možným hodem.
Vypišme si všechny možné hody seřazené podle pravidel hry: 21 (12), 66, 55, 44, 33, 22, 11, 65 (56), 64 (46), 63 (36), 62 (26), 61 (16), 54 (45), 53 (35), 52 (25), 51 (15), 43 (34), 42 (24), 41 (14), 32 (23), 31 (13). Hodí-li medvěd 51 (15), má tuleň (na rozdíl od vzájemného souboje v přírodě) větší šanci na výhru, protože existuje 24 možných lepších hodů a jen 12 horších. Odpovědí na druhou otázku je číslo 54: existuje přesně 18 lepších i horších hodů. Jak už to s kasiny bývá, vždy se snaží co nejvíce informací utajit a i teď se jim podařilo ututlat, že hodit stejné číslo jako předchozí hráč znamená horší výsledek. Poslední otázka byla nejjednodušší (nebo naopak největší chyták), pravděpodobnost, že padne 30, je samozřejmě nulová, protože na kostkách zkrátka nulu nenajdeme.