

Kategorie mladší

Úloha 1A (5 bodů):

Připomeňme si konečnou tabulku turnaje:

Tým	Body	Sety (vítězné:prohrané)
Království zvířat	7	9:4
Levhartovo království	5	7:7
TJ Mosfetovi loupežníci	4	6:7
Sokol Otvírákovo	2	4:8

Království zvířat muselo vyhrát všechny tři zápasy (v tabulce má 9 vyhraných setů): jeden za tři body a dva za dva body. Naopak Sokol Otvírákovo prohrálo 8 setů a aby z nich vytěžilo dva body, muselo jeden zápas vyhrát v poměru 3:2 a dva ztratit po výsledcích 1:3 a 0:3. Hráči z Otvírákova určitě neporazili Království zvířat. Nemohli s ním ani hrát 1:3, pak by totiž Království zvířat nemohlo ztratit body za dvě výhry 3:2 (nevycházely by mu prohrané sety). Z těchto úvah již dokážeme odvodit výsledky všech zápasů Království zvířat (KZ = Království zvířat, LK = Levhartovo království, TJML = TJ Mosfetovi loupežníci a SO = Sokol Otvírákovo):

	KZ	LK	TJML	SO
KZ	X	3:2	3:2	3:0
LK	2:3	X		
TJML	2:3		X	
SO	0:3			X

Pokusme se nyní zjistit, ve kterém zápase uhráli borci z Otvírákova dva body. Kdyby porazili Mosfetovy loupežníky 3:2, museli by loupežníci vyhrát za dva body nad Levhartovým královstvím. Jenže pak by jim neseděly prohrané sety ($3 + 3 + 2 \neq 7$). Z toho vyplývá, že Sokol Otvírákovo prohrálo s loupežníky v poměru 1:3 a po jistě dramatické koncovce porazilo Levhartovo království 3:2. Výsledky zbylých zápasů už snadno dopočítáme podle vyhraných a prohraných setů:

	KZ	LK	TJML	SO
KZ	X	3:2	3:2	3:0
LK	2:3	X	3:1	2:3
TJML	2:3	1:3	X	3:1
SO	0:3	3:2	1:3	X

Úloha 2A (7 bodů):

Při řešení této úlohy budeme postupně zužovat možné počty klasů ve spížárně. Když Tomáš rozdělil klasy po 4, dva mu zbyly: to znamená, že počet klasů ve spížárně je dělitelný 2, ale nikoli 4. Protože zbytek po dělení pěti je roven třem, musí počet klasů ve spížárně končit číslicí 8 (kdyby končil trojkou, nebyl by dělitelný dvěma). Zbytek po dělení třemi je roven 1. Existují jen tři čísla menší než 100 a končící číslicí 8, která toto splňují: 28, 58 a 88. Čísla 28 a 88 jsou však dělitelná čtyřmi, takže vylučovací metodou jsme zjistili, že Tomáš má ve spížárně uloženo 58 klasů. Jediné dvě možnosti, jak rozdělit zásoby na stejně velké díly, je utvořit buď dvě hromádky po 29 klasech, nebo 29 hromádek po dvou klasech.

Úloha 3A (8 bodů):

V boji se svými protivníky si sice pirátské veverky počínají nemilosrdně, avšak při dělení kořisti jsou mírumilovné (alespoň podle pirátských měřítek). Pokud nejstarší veverka slíbí nějaké své mladší kolegyni více oříšků než by mohla dostat od druhé (třetí...) nejstarší, hlasuje určitě „pro“. Jak se ale zachová v případě, že jí nejstarší slíbí právě tolik oříšků, které by dostala i v případě nepřijetí návrhu nejstarší veverky? V zadání se píše, že „pro hlasují jen tehdy, pokud ví, že by stejně více oříšků nedostaly“. To znamená, že i v tomto případě bude hlasovat „pro“ a proti bude jen tehdy, má-li naději na větší podíl z kořisti.

Pokud se plaví tři, Vanda navrhne dělení 100 oříšků pro sebe, 0 pro Xenu a 0 pro Zoru. Xena hlasuje proti, kdyby hodily Vandu přes palubu, rozhodovala by o dělení ona a navrhla by 100 oříšků pro sebe a 0 pro Zoru. Zora si toto uvědomuje, ví, že si v žádném případě nemůže polepšit (ve dvou jí Xena přehlasuje), a tak hlasuje „pro“.

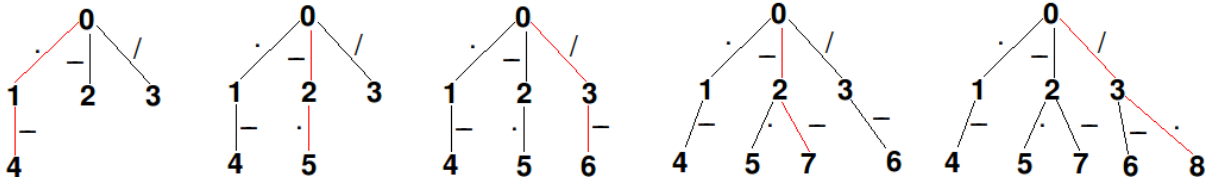
Když vezmou naše veverky do posádky i nejmladší Žanetu, navrhne Vanda dělení 100 oříšků pro sebe a 0 pro ostatní. Překvapivě i teď jí to projde: Vanda bude pochopitelně hlasovat „pro“. Novému benjamínkovi Žanetě nezbyde nic jiného než také hlasovat pro. Kdyby o dělení rozhodovala Xena nebo Zora, Žaneta by si stejně nepolepšila. Dva hlasy už stačí pro přijetí návrhu a veverky se vydají na další plavbu. Kdyby pirátky automaticky odmítaly 0 oříšků, dělení by dopadla jinak, avšak o tom není v zadání ani slovo.



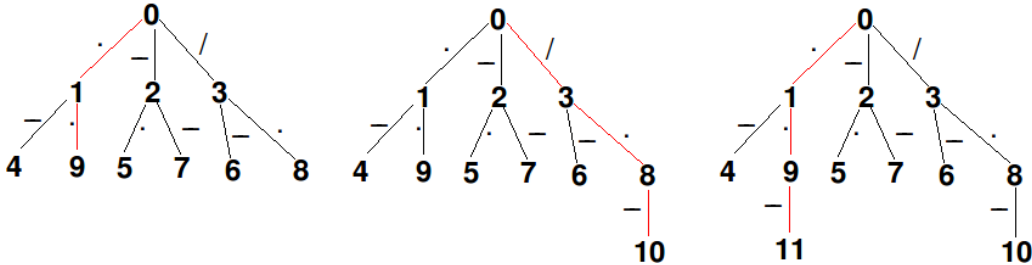
Úloha 4A (10 bodů):

Podle zadání by Honza postupoval takto: odřízne ze zprávy první znak (tečku) a podívá se, jestli z vrcholu 0 vede stejně označená spojnice. Skutečně vede, přesune se ted do vrcholu 1. Opět odřízne první znak zprávy (tentokrát čárka) a hledá spojnicí označenou znakem – vedoucí z vrcholu 1. Žádná taková neexistuje, zapamatuje si tedy číslo 1, přidá do stromu vrchol 4, spojí jej s vrcholem 1 a přesune se zpátky do vrcholu 0. Podobně bude postupovat dále, ale protože obrázek vydá za tisíc slov, raději si jeho postup rozkreslíme:

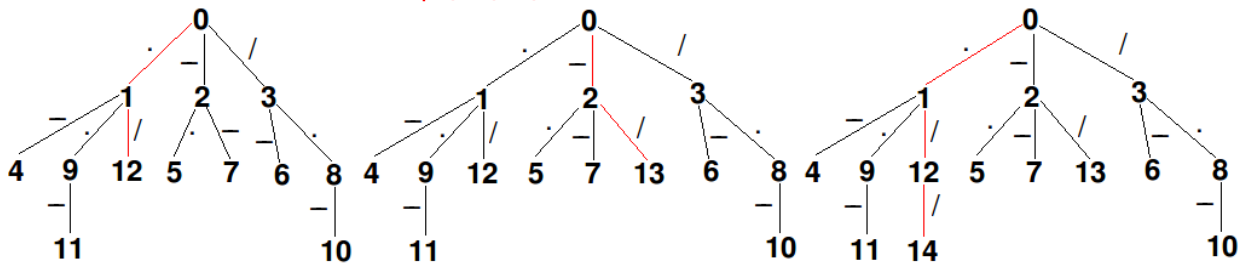
1 | 2 | 3 | 2 | 3 |



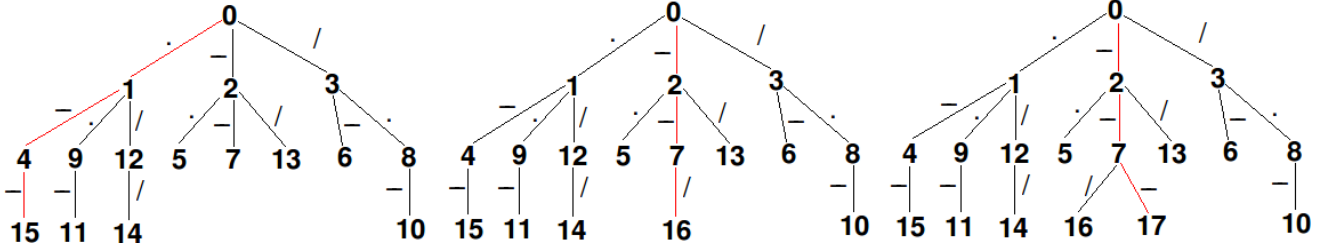
..... | 1 | 8 | 9 |

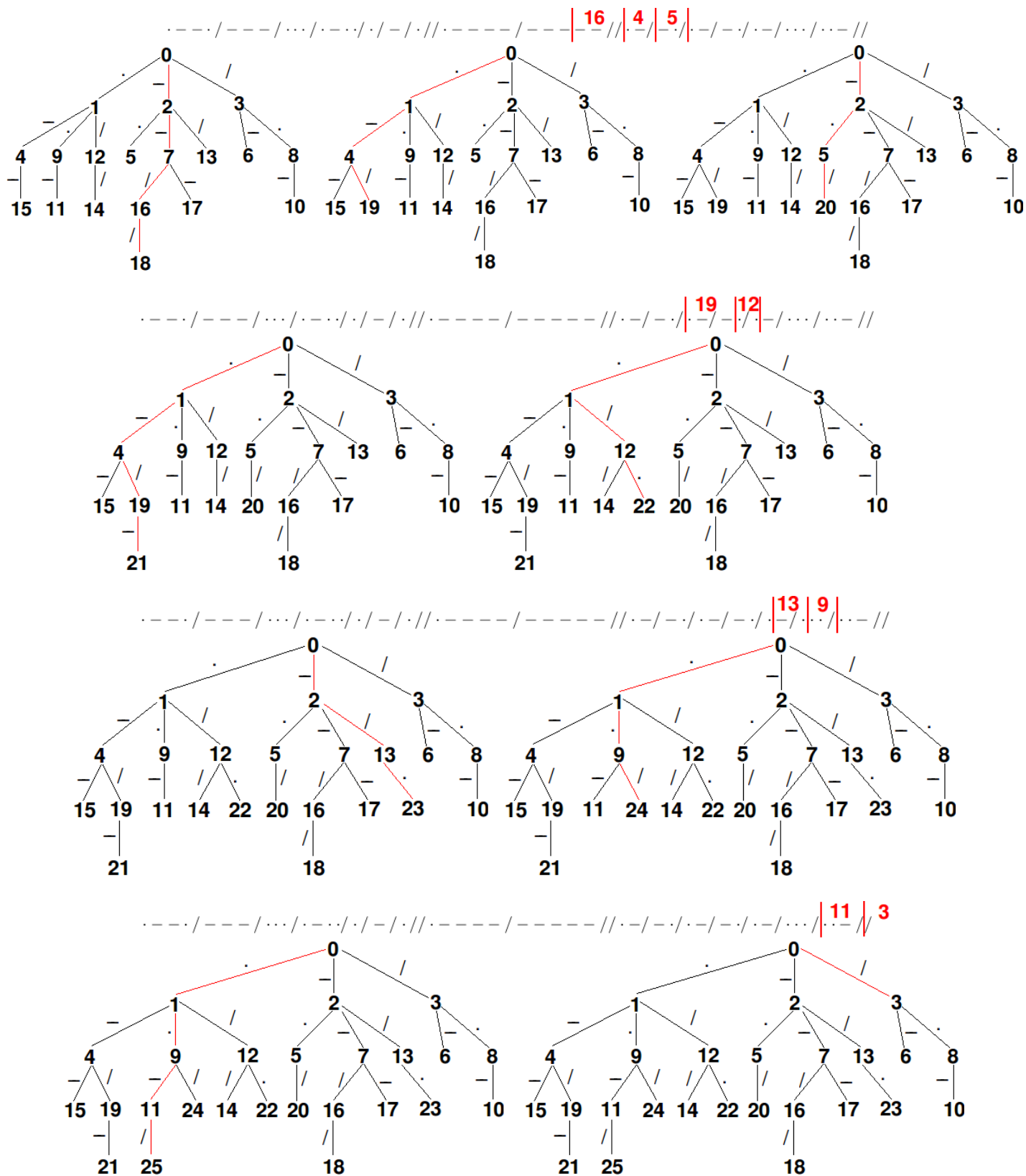


..... | 1 | 2 | 12 |



..... | 4 | 7 | 7 |

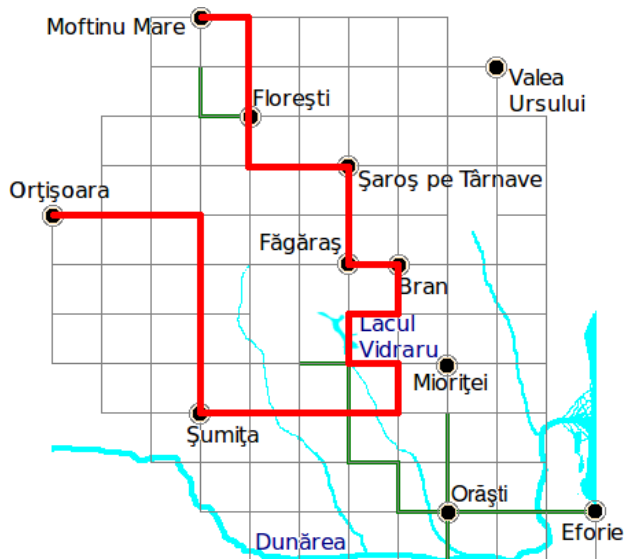




Honza si bude pamatovat čísla 1, 2, 3, 2, 3, 1, 8, 9, 1, 2, 12, 4, 7, 7, 16, 4, 5, 19, 12, 13, 9, 11, 3.

Úloha 5A (6 bodů):

Jedna z možných tras expedice je znázorněna na obrázku 1 tlustou červenou čarou. Její délka je 25 čtverečků a splňuje všechny podmínky: prochází všemi vybranými městy ve správném pořadí, nevede po dálnici a je nejkratší možná (samozřejmě zvířátka mohla trasu naplánovat trochu jinak, ale nikdy ne kratší než 25 čtverečků).



Obrázek 1 Trasa expedice

Mapa má tvar čtverce o straně 1,5125 loktů, po převedení na centimetry tedy

$$w = 1,5125 \cdot 64 = 96,8 \text{ cm} \quad (1)$$

Protože je rozdělena na 11x11 čtverečků, strana jednoho měří

$$a = \frac{96,8}{11} = 8,8 \text{ cm} \quad (2)$$

Trasa na mapě má délku 25 čtverečků, takže kdyby ji zvířátka vyznačila tužkou, měřila by výsledná čára

$$l_m = 8,8 \cdot 25 = 220 \text{ cm} \quad (3)$$

Ve skutečném světě bude délka 500000 krát větší:

$$l = 220 \cdot 500000 \text{ cm} = \frac{220 \cdot 500000}{100 \cdot 1000} \text{ km} = 1100 \text{ km} \quad (4)$$

Zvířátka najezdí 1100 kilometrů.

Kategorie starší

Úloha 1B (5 bodů):

Když si počet stran oné nudné knihy označíme písmenkem x , musel Ivan každý den přečíst $x/7$ stránek. Ve čtvrtek a v pátek však knihu úplně vypustil z hlavy. Nabral zpoždění $2x/7$ stran a aby stihnul svůj úkol splnit do konce týdne, musel o víkendu přečíst 90 stránek navíc. Z těchto údajů můžeme sestavit následující rovnici:

$$\frac{2x}{7} = 90 \quad (5)$$

Po úpravách dostaneme

$$x = 7 \cdot 45 = 315 \quad (6)$$

Ivanova kniha má 315 stránek.

Úloha 2B (7 bodů):

Objem materiálu, který Andrej ponechal, zjistíme snadno tak, že od objemu původní krychle odečteme objem odstraněného materiálu ($182546,875 \text{ cm}^3$). K tomu potřebujeme znát délku hrany původní krychle. Prozatím ji označíme písmenkem x a ona se už někde vyloupne.

Andrej rozdělil původní krychli na 27 stejných krychliček a 7 z nich odstranil. Délka hrany malé krychličky je třikrát menší než délka hrany celé krychle, takže její objem je

$$V_{male} = \left(\frac{x}{3}\right)^3 \text{ cm}^3 \quad (7)$$

Krychliček je 7, takže v prvním kole odebral

$$V_1 = 7 \left(\frac{x}{3}\right)^3 \text{ cm}^3 \quad (8)$$

Potom každou zbývající opět rozdělil na 27 krychličiček a 7 z nich odebral. Větších krychliček zbylo 20, z každé vybral 7 menších, takže v tomto kole odebral

$$V_2 = 7 \cdot 20 \left(\frac{x}{9}\right)^3 \text{ cm}^3 \quad (9)$$

Zbude mu $20 \cdot 20$ menších krychliček a Andrej opět každou rozdělí na 27 menších a z každé 7 odstraní, takže objem materiálu odebraného ve třetím kole je

$$V_3 = 7 \cdot 20 \cdot 20 \left(\frac{x}{27}\right)^3 \text{ cm}^3 \quad (10)$$

Objem odebraného materiálu je $182546,875 \text{ cm}^3$, to znamená

$$V_1 + V_2 + V_3 = 7 \left(\frac{x}{3}\right)^3 + 7 \cdot 20 \left(\frac{x}{9}\right)^3 + 7 \cdot 20 \cdot 20 \left(\frac{x}{27}\right)^3 = 182546,875 \quad (11)$$

Rovnice 11 je na první pohled opravdu ošklivá. Po zjednodušení vyjde

$$7 \left(\frac{x}{3}\right)^3 + 7 \cdot 20 \left(\frac{x}{9}\right)^3 + 7 \cdot 20 \cdot 20 \left(\frac{x}{27}\right)^3 = 182546,875$$

$$(9^3 \cdot 7 + 3^3 \cdot 140 + 2800) x^3 = 27^3 \cdot 182546,875$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{27^3 \cdot 182546,875}{(9^3 \cdot 7 + 3^3 \cdot 140 + 2800)}}$$

$$x = 67,5 \text{ cm} \quad (12)$$

Objem materiálu, který Andrej neodstranil, už dopočítáme snadno:

$$V = (67,5^3 - 182546,875) \text{ cm}^3 = 125000 \text{ cm}^3 \quad (13)$$

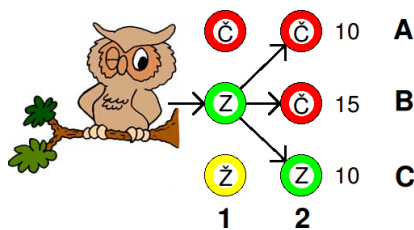
Objem zbytku je 125000 cm^3 .

Úloha 3B (8 bodů):

Nápověda nám radí nalézt nejlepší cesty ke všem třem stromům ve druhém sloupci. Budiž tedy, při výpočtu se dokonce ani moc nezapotíme, protože ke každému stromu ve druhém sloupci je možné doletět jen po třech různých cestách:

Cesta k A2	Cesta k B2	Cesta k C2
$A1 \rightarrow A2: h = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$	$A1 \rightarrow B2: h = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$	$A1 \rightarrow C2: h = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
$B1 \rightarrow A2: h = 1 \cdot 5 \cdot 2 = 10$	$B1 \rightarrow B2: h = 1 \cdot 5 \cdot 3 = 15$	$B1 \rightarrow C2: h = 1 \cdot 5 \cdot 2 = 10$
$C1 \rightarrow A2: h = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$	$C1 \rightarrow B2: h = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$	$C1 \rightarrow C2: h = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$

Ať už se Boris rozhodne letět na strom A2, B2 nebo C2, vždy začne v B1:



Obrázek 2 Nejlepší cesty do druhého sloupce

Dále najdeme nejlepší cestu ke stromu A3. Musíme opět vyzkoušet všechny možné cesty ze startovní pozice, nebo můžeme využít znalost cest do předchozího sloupce? Představme si, že Boris poletí ke stromu A3 přes A2. Chce-li maximalizovat hodnotu cesty, ani ho nenapadne začít u A1 nebo C1, protože k A2 nejlépe doletí z B1. Podobně poletí-li přes B2 nebo C2, Borise vůbec nemusí zajímat, kolik různých cest může zvolit. Stačí mu znát nejvýhodnější cesty ke stromům ve druhém sloupci a nejlepší cesta ke stromu A3 (stejně tak pro B3 a C3) zkrátka jen na některou z nich naváže:

Cesta k A3	Cesta k B3	Cesta k C3
$A2 \rightarrow A3: h = 10 \cdot 1 \cdot 3 = 30$	$A2 \rightarrow B3: h = 10 \cdot 1 \cdot 2 = 20$	$A2 \rightarrow C3: h = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10$
$B2 \rightarrow A3: h = 15 \cdot 1 \cdot 2 = 30$	$B2 \rightarrow B3: h = 15 \cdot 1 \cdot 3 = 45$	$B2 \rightarrow C3: h = 15 \cdot 1 \cdot 2 = 30$
$C2 \rightarrow A3: h = 10 \cdot 5 \cdot 1 = 50$	$C2 \rightarrow B3: h = 10 \cdot 5 \cdot 2 = 100$	$C2 \rightarrow C3: h = 10 \cdot 5 \cdot 3 = 150$

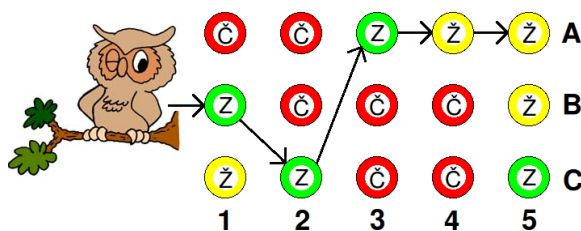
Podobně najdeme nejlepší cesty do čtvrtého sloupce:

Cesta k A4	Cesta k B4	Cesta k C4
$A3 \rightarrow A4: h = 50 \cdot 5 \cdot 3 = 750$	$A3 \rightarrow B4: h = 50 \cdot 5 \cdot 2 = 500$	$A3 \rightarrow C4: h = 50 \cdot 5 \cdot 1 = 250$
$B3 \rightarrow A4: h = 100 \cdot 1 \cdot 2 = 200$	$B3 \rightarrow B4: h = 100 \cdot 1 \cdot 3 = 300$	$B3 \rightarrow C4: h = 100 \cdot 1 \cdot 2 = 200$
$C3 \rightarrow A4: h = 150 \cdot 1 \cdot 1 = 150$	$C3 \rightarrow B4: h = 150 \cdot 1 \cdot 2 = 300$	$C3 \rightarrow C4: h = 150 \cdot 1 \cdot 3 = 450$

a do posledního sloupce (včetně započítání cílového stromu):

Cesta k A5	Cesta k B5	Cesta k C5
$A4 \rightarrow A5: h = 750 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 20250$	$A4 \rightarrow B5: h = 750 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 13500$	$A4 \rightarrow C5: h = 750 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 6750$
$B4 \rightarrow A5: h = 500 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3000$	$B4 \rightarrow B5: h = 500 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 4500$	$B4 \rightarrow C5: h = 500 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3000$
$C4 \rightarrow A5: h = 450 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = 2250$	$C4 \rightarrow B5: h = 450 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 = 4500$	$C4 \rightarrow C5: h = 450 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = 6750$

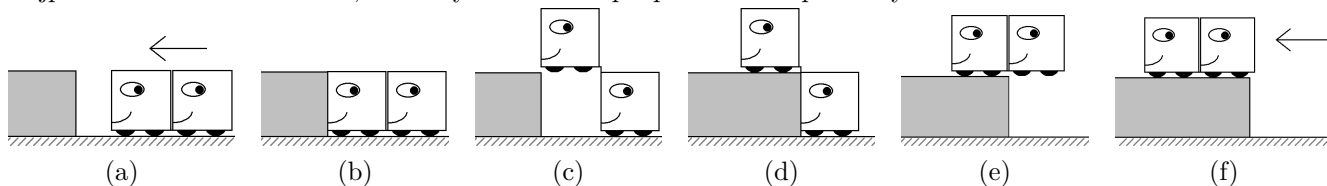
Nejvýhodnější cesta tedy končí na stromě A5. K němu poletí Boris z A4, k A4 z A3, k A3 z C2 a k C2 z B1. Ve správném pořadí je nejlepší cesta $B1 \rightarrow C2 \rightarrow A3 \rightarrow A4 \rightarrow A5$:



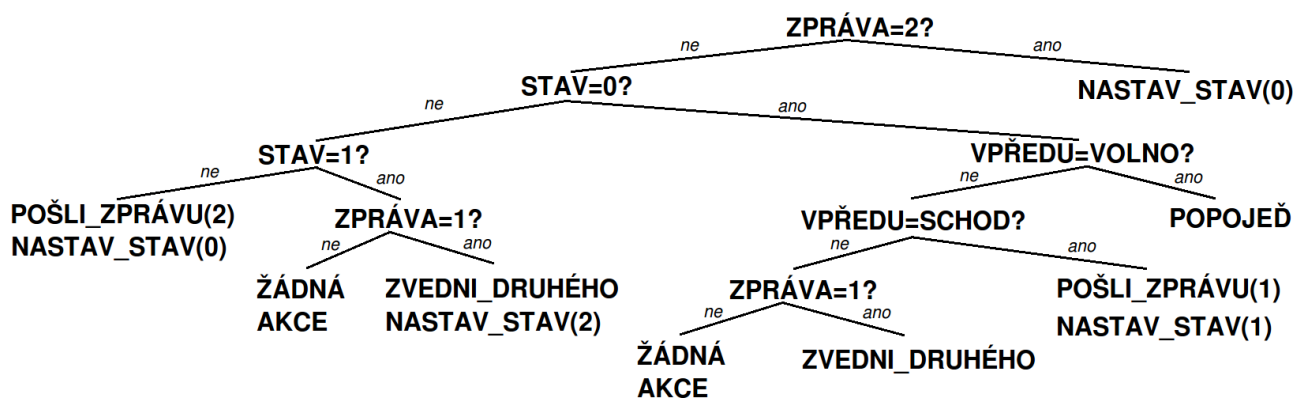
Obrázek 3 Nejlepší cesta lesem

Úloha 4B (10 bodů):

Nejprve si rozkreslíme situace, do kterých se roboti při překonávání překážky dostanou:

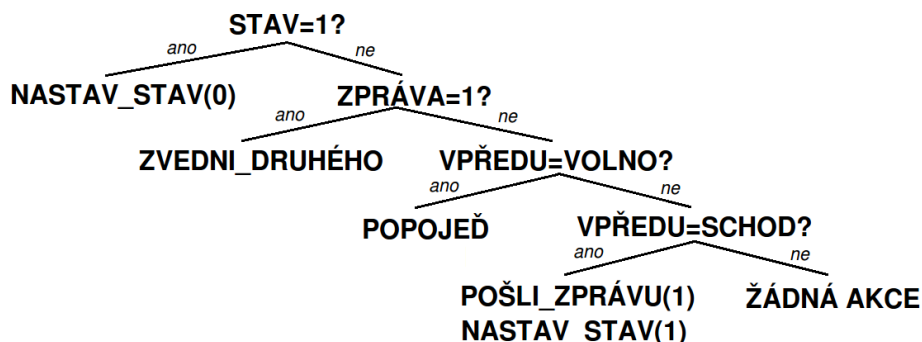


Roboti nejprve jedou volným prostranstvím (a) a když vedoucí robot narazí na schod (b), pošle o tom kolegovi zprávu. Ten zvedne prvního robota do výšky (c), popojede ke schodu (d) a rovněž pošle zprávu, že si přeje být vyzvednut. Jakkmile je i druhý robot na úrovni schodu (e), pokračují oba v pohybu (f). Řídicí program by mohl fungovat např. takto: Má-li před sebou první robot volno, postupuje kupředu. Jakkmile narazí na schod (b), pošle svému kolegovi zprávu, že si přeje být vyzvednut (zpráva 1) a přejde do stavu 1, ve kterém nevyvíjí žádnou aktivitu a pouze čeká na zprávu. Druhý robot naopak nevyvíjí žádnou aktivitu na volném prostranství, tedy má-li před sebou prvního robota. Jakkmile dostane zprávu 1 (b), zvedne druhého robota do výšky (c). Tím se před ním otevře volný prostor a protože bude druhý robot stále ve stavu 0, začne postupovat dopředu a jakmile narazí na schod, pošle prvnímu robotu zprávu 1 a přejde do stavu 1 (využije k tomu stejnou větev programu jako první robot). V situaci (d) budou oba roboti ve stavu 1 a první robot navíc přijme do schránky zprávu 1. Na ní musí zareagovat zvednutím druhého robota (e). Aby mohla naše dvojice pokračovat v postupu jako na začátku, musí být oba roboti uvedeni do stavu 0 (f) (s využitím pomocného stavu 2 a zprávy 2). Výsledný program může vypadat jako na následujícím obrázku:



Obrázek 4 Ukázkový program

Naše řešení je sice funkční a (jak alespoň doufáme) pochopitelné, ale Zuzana Johanovská vymyslela ještě lepší:



Obrázek 5 Program Zuzany Johanovské

Její řešení využívá pozorování, že není nutné rozlišovat situace (a), (c), (e) a (f) - jeden z robotů má vždy před sebou volno a postupuje dopředu a druhý nedělá nic (případně se mu ve vzduchu protáčí kolečka). Podobně situace (b) a (d) - robot, který je čelem bezprostředně u schodu žádá o pomoc a druhý v tu chvíli nedělá nic (v situaci (d) se snaží jet dopředu, ale to se mu nepovede a ve výsledku je nečinný). V následujícím okamžiku je robot stojící u schodu vyzvednut a aby neposlal zprávu 1 dvakrát, uvede se na chvíli do stavu 1. A to je celé, v jednoduchosti je síla.

Úloha 5B (6 bodů):

Počet bodů, které si Donald nebo Pascal připiší za jeden hod, závisí jen na jeho vzdálenosti od středu stěny - terče. Vzdálenost od středu zjistíme pomocí Pythagorovy věty:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(x - m)^2 + (y - n)^2}$$

Číslo a je rozdíl x -ových souřadnic hodu a středu terče (podobně číslo b je rozdíl y -ových souřadnic, viz obrázek vpravo). Vzdálenosti jednotlivých hodů jsou tyto:

Donald (červené křížky):

$$h_1 = \sqrt{(40 - 50)^2 + (78 - 100)^2} = 24, 2: \mathbf{8 \text{ bodů.}}$$

$$h_2 = \sqrt{(17 - 50)^2 + (62 - 100)^2} = 50, 3: \mathbf{0 \text{ bodů.}}$$

$$h_3 = \sqrt{(76 - 50)^2 + (105 - 100)^2} = 26, 5: \mathbf{4 \text{ body.}}$$

$$h_4 = \sqrt{(51 - 50)^2 + (96 - 100)^2} = 4, 1: \mathbf{128 \text{ bodů.}}$$

$$h_5 = \sqrt{(35 - 50)^2 + (135 - 100)^2} = 38, 1: \mathbf{1 \text{ bod.}}$$

Celkové skóre: $s_1 = 8 + 0 + 4 + 128 + 1 = 141$.

Pascal (modrá kolečka):

$$h_6 = \sqrt{(42 - 50)^2 + (98 - 100)^2} = 8, 2: \mathbf{64 \text{ bodů.}}$$

$$h_7 = \sqrt{(75 - 50)^2 + (89 - 100)^2} = 27, 3: \mathbf{4 \text{ body.}}$$

$$h_8 = \sqrt{(20 - 50)^2 + (114 - 100)^2} = 33, 1: \mathbf{2 \text{ body.}}$$

$$h_9 = \sqrt{(42 - 50)^2 + (111 - 100)^2} = 13, 6: \mathbf{32 \text{ bodů.}}$$

$$h_{10} = \sqrt{(58 - 50)^2 + (112 - 100)^2} = 14, 4: \mathbf{32 \text{ bodů.}}$$

Celkové skóre: $64 + 4 + 2 + 32 + 32 = 134$.

Sázku vyhrál Donald s celkovým skóre 141 bodů.

