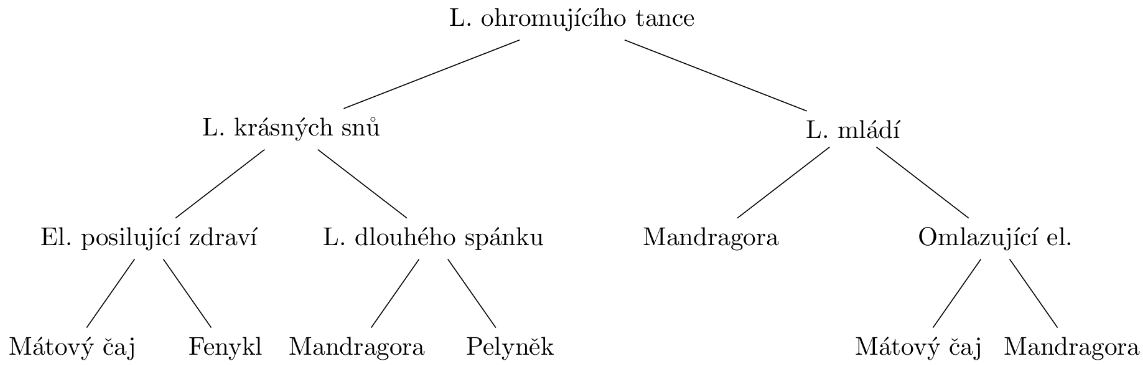
Kategorie mladší

Úloha 1A (5 bodů):
Máme pět teleskopů na pozicích 0, 1, 8, 11 a 13. Postupně budeme zjišťovat, které vzdálenosti jsou už zabrané a jakmile narazíme na nějakou volnou (označme ji třeba písmenem d), zkusíme umístit šestý teleskop na pozici 13+d. Vzdálenost 1 je už zabraná, protože $1 - 0 = 0$. Stejně tak vzdálenost 2 $(13 - 11)$ a 3 $(11 - 8)$. Vzdálenost 4 je ale volná, takže zkusíme nejprve umístit šestý teleskop na pozici $13 + 4 = 17$ a uvidíme, zda-li se stále vzdálenosti všech přístrojů od sebe navzájem liší. A skutečně, když si všechny vzdálenosti propočítáme (třeba tak, že postupně zkoušíme, kolikrát se opakují vzdálenosti 1, 2, 3 až 17, dá to trochu práci, ale určitě neuděláme více než 17 kroků), zjistíme, že se žádná neopakuje. Šestý teleskop musí astronomové postavit na pozici 17.

Úloha 2A (7 bodů):
Aby se nám v knize lépe orientovalo, jednotlivé přísady a lektvary si nejprve přehledně přepíšeme:

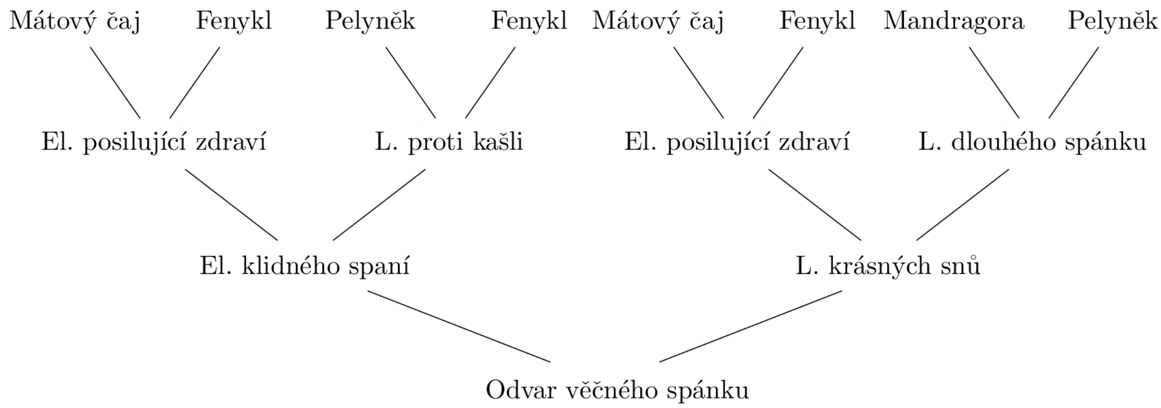
1. Mč + F ⇒Ez
2. Km + Mč ⇒Oe
3. P + F ⇒Lpk
4. Lks + Lm ⇒Lot
5. Km + P ⇒Lds
6. Km + Mč ⇒Lde
7. S + Eks ⇒Lot
8. Ez + Lds ⇒Lks
9. Eks + Lks ⇒Ovs
10. Km + Oe ⇒Lm
11. Ez + Lpk ⇒Eks

Lektvar ohromujícího tance (Lot) můžeme namíchat podle pravidel **4** nebo **7**. Na pravidlo **7** ale potřebujeme skořici a ta ve skříni není, takže budeme postupovat podle pravidla č. **4**. To nám velí smíchat lektvar krásných snů (Lks) a lektvar mládí (Lm). Pro výrobu Lks použijeme pravidlo **8**, jež radí smíchat elixír zdraví (Ez) a lektvar dlouhého spánku (Lds). V tuto chvíli už víme, že Lot namícháme jako Ez+Lds+Lm. Pro výrobu Ez lze využít pravidlo č. **1**, které káže použít mátový čaj (Mč) a fenykl (F). V tomto kroku můžeme celkový recept zapsat jako Mč+F+Lds+Lm. Dále zkusíme namíchat Lds. Podle pravidla **5** stačí použít kořen mandragory (Km) a pelyněk (P). Lm namícháme jako kořen mandragory (Km) a omlazující elixír (Oe) podle pravidla **10**. Nyní již máme skoro hotovo, v kotlíku se nachází směs Mč+F+Km+P+Km+Oe a zbývá namíchat Oe. K tomu nám dopomůže druhé pravidlo. Podle něj použijeme kořen mandragory (Km) a mátový čaj (Mč). Nyní se recept skládá výhradně z přísad, které jsou k nalezení ve skříni. Učeň použije následující recept: mátový čaj + fenykl + kořen mandragory + kořen mandragory + mátový čaj ⇒lektvar ohrnomujícího tance. Celý postup je shrnut na následujícím obrázku:



Obrázek 1 Míchání lektvaru ohromujícího tance

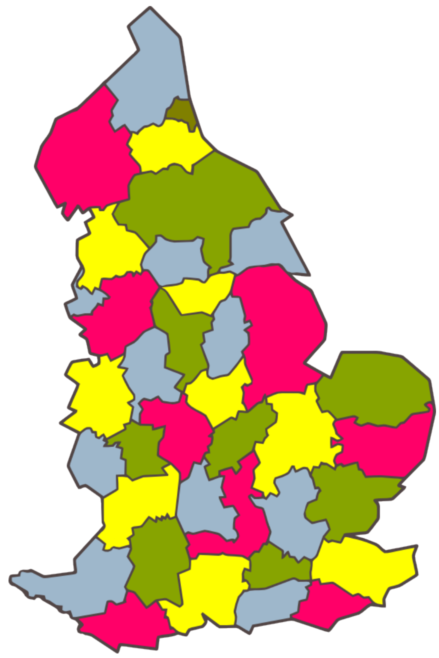
V druhé části úlohy víme, co vrchní alchymista přídával do kotlíku. Zapíšeme si jeho recept: Mč+F+P+F+Mč+F+Km+P. Když se pozorně podíváme do chytré knihy, zjistíme, že prvním dvěma přísadám odpovídá pravidlo jedna. Obě přísady myšleně nahradíme výsledným elixírem zdraví a obsah kotlíku se změní na Ez+P+F+Mč+F+Km+P. Podíváme se opět do knihy. Žádnou radu, která by se týkala elixíru zdraví (Ez) nemůžeme použít, a tak postoupíme dál. Pravidlo **3** nám pomůže nahradit pelyněk a fenykl (P+F) za lektvar proti kašli (Lpk), čímž se obsah kotlíku změní na Ez+Lpk+Mč+F+Km+P. První dvě přísady teď můžeme smíchat podle pravidla **11** a v kotlíku bude směs Eks+Mč+F+Km+P. Do elixíru klidného spaní (Eks) můžeme dle knihy přilít jen lektvar krásných snů, který se teď v kotlíku nenachází, takže Eks zatím nijak nahradit nemůžeme. Mč+F dává Ez podle pravidla jedna a v kotlíku zůstane Eks+Ez+Km+P. Nyní nám nezbývá jiná možnost, než použít pravidlo **5** a obsah kotlíku zjednodušit na Eks+Ez+Lds. Poslední dvě přísady odpovídájí pravidlu **8**, které použijeme a v kotlíku získáme přísady pravidla **9**. Nyní víme, že se alchymista snaží připravit odvar věčných snů, asi má zase nějaké trápení se svým novým učněm a nemůže pořádně spát. Míchání odvaru věčného spánku je znázorněno na následujícím obrázku:



Obrázek 2 Míchání odvaru věčného spánku

Úloha 3A (8 bodů):

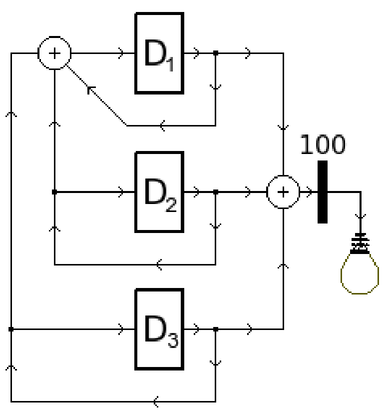
Tato úloha byla poměrně jednoduchá a mohli jste ji vyřešit mnoha způsoby. Např. začít v nějaké krajní oblasti a během vybarvování zbytku mapy se snažit používat co nejméně barev. Při tomto postupu se někdy můžeme dostat do slepé uličky, ale stačí jen pár oblastí zase odbarvit a zkusit to jinak. Jedno možné obarvení mapy království zvířat vidíte na obrázku vpravo.



Mnohem zajímavější je ale historické pozadí této úlohy. Problém obarvování map zaměstnával dlouhá léta mozky nejlepších matematiků. V roce 1852 byla poprvé vyslovena domněnka, že každou politickou mapu je možné obarvit jenom čtyřmi barvami bez ohledu na její složitost nebo velikost. S touto myšlenkou přišel student anglického matematika Williama Hamiltona, když se pokoušel obarvit politickou mapu Velké Británie, jejíž zjednodušenou verzi jste dostali v této úloze.

Během dalších 40 let bylo dokázáno, že pro obarvení libovolné mapy určitě stačí pět barev. Ale původní myšlenka, že stačí barvy čtyři, odolávala důkazu tak dlouho, až si lidé začali myslet, že obecně čtyři barvy nemusí stačit. Teprve v roce 1976, tedy více než 120 let po první formulaci úlohy, se pomocí počítače podařilo dokázat, že původní domněnka byla správná, a tak dnes můžeme s jistotou říci, že každou mapu je možné obarvit nejvýše čtyřmi barvami. Že důkaz nebyl vůbec jednoduchý dokládá i fakt, že jeho tištěná podoba má 56 stran textu a 114 stran obrázků.

Úloha 4A (10 bodů):



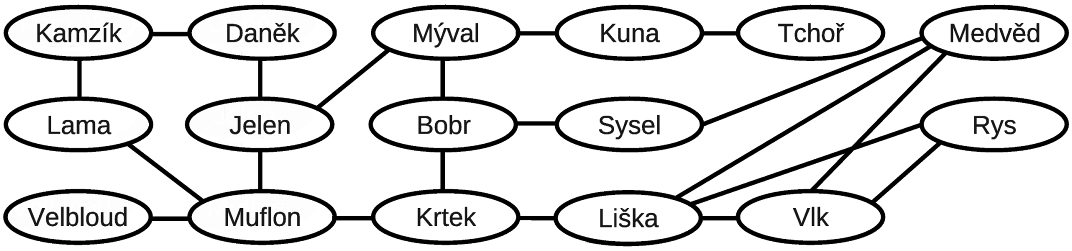
Když si pořádně prohlédneme nákres přístroje, můžeme si všimnout, že krabička $\boxed{D_2}$ je ovlivněna pouze sama sebou. Jediný drát, který vede na její vstup, je ten z jejího výstupu. Stejná situace je i u krabičky $\boxed{D_3}$. Co z toho vyplývá pro hodnoty těchto krabiček? Každou půlnoc vezmou číslo na svém vstupu a zapamatují si ho. Protože do těchto krabiček vede pouze drát z jejich výstupu a žádný jiný, budou mít na vstupu vždy stejné číslo jako na výstupu a jejich stav se nikdy nezmění. Ať se děje co se děje, hodnoty krabiček $\boxed{D_2}$ a $\boxed{D_3}$ budou vždy 1. Zajímavější je chování krabičky $\boxed{D_1}$. Na jejím vstupu je umístěna součástka, která sčítá výstupy ze všech tří krabiček. Víme už, že hodnoty $\boxed{D_2}$ a $\boxed{D_3}$ jsou za všech okolností rovny 1, takže hodnota krabičky $\boxed{D_1}$ se každou půlnoc zvětší o 2. První den mají všechny krabičky $\boxed{D}$ hodnotu 1 a do černého obdélníčku vstupuje číslo 3. O půlnoci se hodnota první krabičky zvětší o 2 a do černého obdélníčku bude vstupovat číslo 5. Další den 7, pak 9, atd. Milan by jistě mohl pokračovat až do 100, ale chameleoni jsou od přírody líní, a tak počet dní zbývajících do žní raději určí výpočtem. První den vstupuje do černého obdélníčku číslo 3 a každý další den o dva více. Přístroj musí celkem nasčítat 97 (100-3), a to zvládne za 97/2=48,5 dní. Stav přístroje se ovšem mění jen o půlnoci a ne v půlce dne, takže chceme-li bezpečně překročit 100, zaokrouhlíme 48,5 nahoru. Žně začnou za 49 dní a do černého obdélníčku bude vstupovat číslo 101.

Úloha 5A (6 bodů):
Podívejme se nejprve na jakých tratích mají vlaky jezdit v 6:00. Jeden má jet z města A do města E (elektrifikovaná trať), jeden z D do A (trať bez drátů) a další z C do D (elektrifikovaná trať). Na trati z města D do města A může jet pouze motorový vlak, a tak mu naplánujeme jízdy jako prvnímu. V 6:30 dojede do města A a hned (samozřejmě nechá vystoupit a nastoupit cestující) musí odjet do města B. Z B odjede v 7:00 do E a odtud v 7:30 do A a tam půl hodiny čeká. Radní z A chtějí, aby v 8:30 odjížděly z jejich města vlaky hned do tří směrů (B, D a E). Vidíme ale, že trať z A do D není elektrifikovaná, takže v 8:30 pojede motorák právě tudy. V 9 hodin přijede do D a hned se vydá na cestu do města E. Odtud musí do B (elektrické vlaky by tudy cestující museli tlačit sami). V B půl hodiny počká a v 10:00 odjede do města A. Tam bude také půl hodiny čekat a jeho poslední dopolední jízda povede po neelektrifikované trati do města D, kam přijede ve 12:00. Elektrickým vlakům naplánujeme cesty stejným způsobem jako motoráku a výsledný jízdní řád může vypadat např. takto:

	6:00	**6:30**	**7:00**	**7:30**	**8:00**	**8:30**	**9:00**	**9:30**	**10:00**	**10:30**	**11:00**	**11:30**	**12:00**
Elektrický 1	A ⟶	E ⟶	D ⟶	C ⟶	E ⟶	A ⟶	B -------	B ⟶	C -------	C ⟶	B ⟶	A ⟶	E
Elektrický 2	E ⟶	C -------	C ⟶	B ⟶	A -------	A ⟶	E -------	E ⟶	C -------	C ⟶	E ⟶	A -------	A
Motorový	D ⟶	A ⟶	B ⟶	E ⟶	A -------	A ⟶	D ⟶	E ⟶	B -------	B ⟶	A -------	A ⟶	D

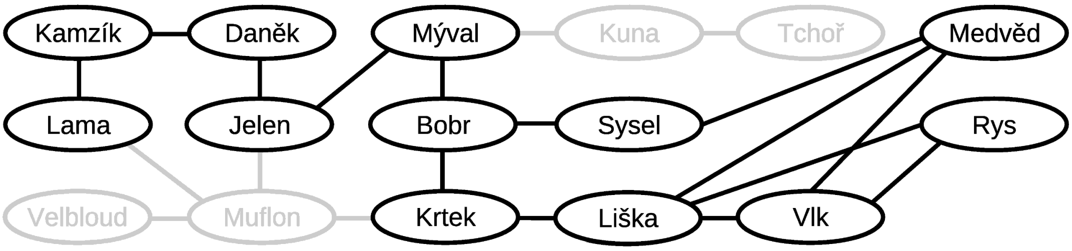
Kategorie starší

Úloha 1B (5 bodů):
Při řešení této úlohy je nejlepší si nakreslit, která zvířátka proti sobě mohou sedět:



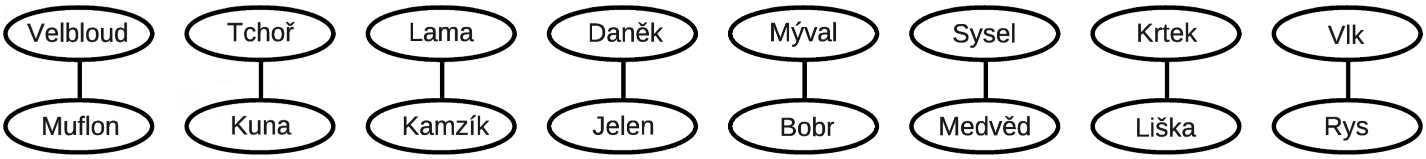
Obrázek 3 Vztahy zvířátek

Vidíme, že velbloud se zná jenom s muflonem a tchoř jenom s kunou, takže tyto dvojice musí sedět proti sobě a můžeme je z obrázku vymazat:



Obrázek 4 Vztahy zvířátek

Z obrázku 4 je vidět, že lama musí sedět proti kamzíkovi, následně daněk proti jelenovi, mýval proti bobrovi, sysel proti medvědovi, krtek proti lišce a jako poslední zbyla dvojice vlk a rys. Celé řešení je přehledně nakresleno na následujícím obrázku:



Obrázek 5 Výsledné uspořádání

Úloha 2B (7 bodů):
Tato úloha má několik způsobů řešení. Asi nejsnažší je napsat si pravdivostní tabulku celého výroku. Pro výraz ze zadání to ale může být těžké, takže si práci rozdělíme, spočítáme nejprve jeho části a ty pak spojíme dohromady. Pravdivostní tabulky spojek „a“ ($x \wedge y$) a „nebo“ ($x \vee y$) už známe a zbývá jen vymyslet pravdivostní tabulku implikace. Ze zadání víme, že je stejná jako u výroku $\neg x \vee y$:

x	$\neg x$	y	$\neg x \vee y$	$x \rightarrow y$
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1

Tabulka 1 Pravdivostní tabulka implikace

Implikace je tedy nepravdivá jen tehdy, je-li její předpoklad pravdivý a důsledek nepravdivý. I když to s řešením úlohy nesouvisí, Oldřich si musí dát velký pozor, aby neměl ve spisech výrok ve tvaru $x \rightarrow y$ a $x = 0$. Kdyby x znamenalo „4 je liché číslo“ a y „hroch je vinen“, výrok $x \rightarrow y$ (přečteno lidským způsobem „je-li 4 liché číslo, pak je hroch vinen“) by byl pravdivý. Mohlo by se zdát, že náš imaginární hroch je skutečně vinen, ale je zřejmé, že je to pěkný nesmysl. Jenže výrok x nemusel být na první pohled takto nesmyslný a při odvozování nových faktů se musíme vždy pečlivě přesvědčit, že všechny předpoklady jsou pravdivé.

Pokračujme ale v řešení úlohy. Výrok ze zadání si rozložíme na menší části a z nich sestavíme pravdivostní tabulku celého výroku:

x	y	$y \to x$	$\neg(y \to x) = A$	$x \wedge \neg y = B$	$\neg x \to y$	$\neg(\neg x \to y) = C$	$A \vee B \vee C$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0

Tabulka 2 Pravdivostní tabulka zadaného výroku

Poslední sloupec je podezřele podobný výroku $x \wedge y$, pouze jsou prohozené nuly a jedničky. To ale nevadí, jednu negaci máme dovolenou a řešením úlohy je výrok

$$\neg(x \wedge y) \tag{1}$$

Někteří z Vás odhalili i jiná správná řešení:

$$x \to \neg y \tag{2}$$

$$y \to \neg x \tag{3}$$

Úloha 3B (8 bodů):
Všechna písmena si nejprve přehledně označíme (G vlevo nahoře bude G_1, G vpravo nahoře G_2, D vlevo dole D_1 a zbylé písmeno D bude D_2), pro každé písmeno spočítáme čísla a, b, c a d a výsledky zapíšeme do tabulky:

	a	**b**	**c**	**d**
$\mathbf{G_1}$	0	-6	0	4
$\mathbf{G_2}$	2	-4	4	4
$\mathbf{D_1}$	0	-4	0	0
$\mathbf{D_2}$	2	-6	0	2

Tabulka 3 Čísla a, b, c a d pro vzorová písmena

Výpočtů je trochu více a když si nedáme pozor, snadno v nich uděláme chybu. Existuje však rychlý způsob, jak si je alespoň částečně zkontrolovat. V každé čtvrtině znaku je přesně 12 čtverečků. Když od sebe odečítáme dvě čísla, jejichž součet je 12, výsledek musí vyjít sudý (buď odečítáme dvě sudá čísla nebo dvě lichá, promyslete si!). Kdyby se v tabulce **3** vyskytlo nějaké liché číslo, hned by bylo jasné, že jsme udělali chybu.
Nyní hledáme taková čísla x, y, z a u aby pro obě vzorová G platilo

$$ax + by + cz + du = 1 \tag{4}$$

a pro obě vzorová D

$$ax + by + cz + du = -1. \tag{5}$$

Počítat 4 neznámé najednou nevypadá zrovna lákavě. Všimněme si ale, jaké hodnoty mají a, b, c a d u písmena D_1: až na b to jsou samé nuly. Takže když si dosadíme do vzorce **5**, vyjde

$$\begin{aligned} ax + by + cz + du &= -1 \\ 0x - 4y + 0z + 0u &= -1 \\ -4y &= -1 \\ y &= \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{6}$$

Jako další vyšetříme písmeno G_1. Podle zadání je y u všech písmen stejné a protože jsme y už vypočítali, budeme s ním dále zacházet jako s obyčejným číslem a ne proměnnou. Po dosazení do vzorce **4** vyjde

$$\begin{aligned} ax + by + cz + du &= 1 \\ 0x - 6\frac{1}{4} + 0z + 4u &= 1 \\ -\frac{6}{4} + 4u &= 1 \\ 4u &= \frac{5}{2} \\ u &= \frac{5}{8} \end{aligned} \tag{7}$$

Potom vybereme písmeno D_2 a dosadíme do vzorce 5:

$$\begin{aligned} ax + by + cz + du &= -1 \\ 2x - 6\frac{1}{4} + 0z + 2\frac{5}{8} &= -1 \\ 2x - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} &= -1 \\ 2x &= -\frac{3}{4} \\ x &= -\frac{3}{8} \end{aligned} \tag{8}$$

Nakonec vybereme písmeno G_2 a vypočítáme proměnnou z:

$$\begin{aligned} ax + by + cz + du &= 1 \\ -2\frac{3}{8} - 4\frac{1}{4} + 4z + 4\frac{5}{8} &= 1 \\ -\frac{3}{4} - 1 + 4z + \frac{5}{2} &= 1 \\ 4z &= \frac{1}{4} \\ z &= \frac{1}{16} \end{aligned} \tag{9}$$

Hodnoty proměnných x, y, z a u jsou

$$x = -\frac{3}{8} \tag{10}$$

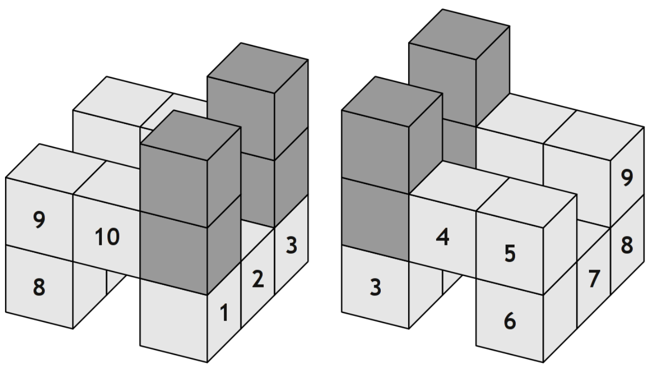
$$y = \frac{1}{4} \tag{11}$$

$$z = \frac{1}{16} \tag{12}$$

$$u = \frac{5}{8} \tag{13}$$

Úloha 4B (10 bodů):

Na obrázku vpravo je nakreslen klíč, který splňuje oba předepsané pohledy a zároveň obsahuje největší možný počet malých kostiček (14). Snadno zjistíme, že ani jednu kostičku z horní vrstvy nemůžeme odebrat, protože bychom porušili pohled zepředu. Zároveň nemůžeme odstranit kostičky pod nimi, kdybychom to udělali, kostky v horní vrstvě by neměly společnou stěnu s žádnou jinou kostkou a opět bychom porušili zadání. Tyto 4 kostky si tedy označíme tmavší barvou jako nepohyblivé. Z žádného možného klíče je nesmíme odebrat.



Ostatní kostičky si očíslujeme od 1 do 10. Po krátkém zápase si každý jistě povšimne, že všechny očíslované kostky mají právě dva sousedy a spolu se dvěma tmavými kostkami z prostřední vrstvy tvoří uzavřenou kružnici. Pokud chceme z maximálního

klíče odebrat nějaké kostičky a zároveň zachovat jeho celistvost, nesmíme v klíči vytvořit více než jednu díru. Kružnice by se rozpadla na dvě části, posádka vesmírné lodi by se dvěma kusy nic neotevřela a my bychom nesplnili zadání.
Zkusme nejprve odebrat jednu kostku, např. s číslem 1. Oba pohledy zůstanou zachovány a není porušena ani celistvost celého tělesa, takže jsme vytvořili nový přípustný klíč. Stejně tak když odstraníme kostičku č. 2 a ostatní ponecháme. Takto budeme pokračovat, až nakonec zjistíme, že můžeme odstranit libovolnou světlou kostičku a dostaneme přípustné řešení. Světlých kostiček je 10, takže dohromady 10 klíčů o 13 kostkách.
V dalších krocích budeme postupně odebírat 2, 3 a 4 kostičky a všechny možnosti si přehledně vypíšeme do tabulky:

Počet	Kostky, které lze odstranit
1	$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$, $\{10\}$
2	$\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{5,6\}$, $\{6,7\}$, $\{7,8\}$, $\{8,9\}$, $\{9,10\}$
3	$\{4,5,6\}$, $\{5,6,7\}$, $\{7,8,9\}$, $\{8,9,10\}$
4	$\{4,5,6,7\}$, $\{7,8,9,10\}$

Tabulka 4 Přípustné klíče

Více než 4 kostky odebrat nelze, takže už jen zbývá sečíst všechny přípustné klíče a spočítat, kolik malých kostek se spotřebuje na jejich výrobu. Počet přípustných klíčů je (nezapomeňte na maximální klíč se 14 kostkami)

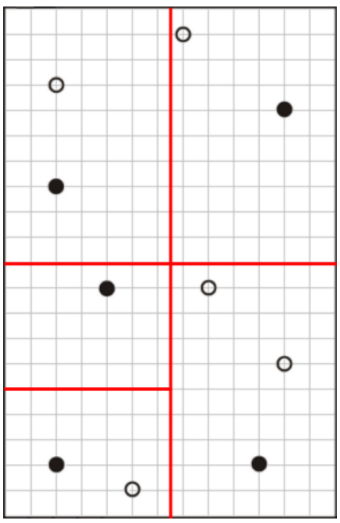
$$n = 1 + 10 + 8 + 4 + 2 = 25 \tag{14}$$

a na jejich výrobu se spotřebuje

$$s = 1 * 14 + 10 * 13 + 8 * 12 + 4 * 11 + 2 * 10 = 304 \tag{15}$$

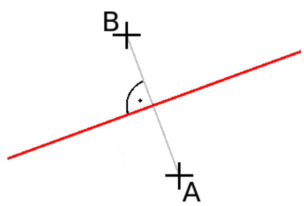
malých kostiček.

Úloha 5B (6 bodů):
V prvním případě je postup velice jednoduchý. Na začátku představuje celá louka jeden pozemek, je na ní více než jedna nora, a tak ji rozdělíme vodorovnou úsečkou na horní a dolní půlku. Tím vzniknou dva pozemky o rozměrech 13x10 čtverečků, na každém se nachází více než jedna nora, a tak opět oba pozemky rozetneme, tentokrát svislou úsečkou. Kromě levé dolní oblasti se nyní na všech pozemcích nachází jediná nora. Jako poslední tedy rozdělíme levý dolní pozemek (vodorovnou úsečkou) a jsme hotovi. Výsledné dělení je nakresleno na následujícím obrázku:

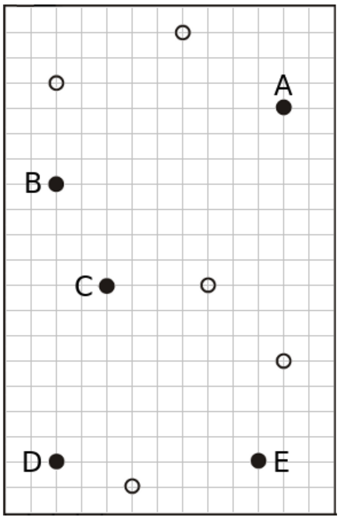


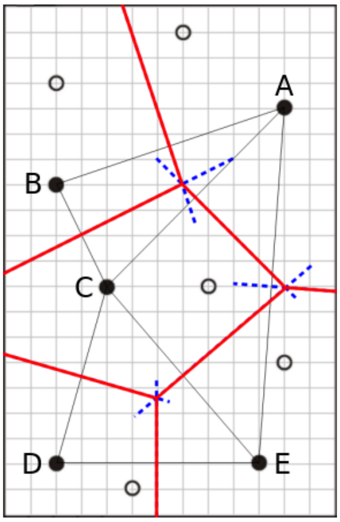
Obrázek 6 První způsob dělení

Druhý způsob dělení je o něco obtížnější. Představme si nejprve jednodušší úlohu. Máme dva body A, B v rovině a chceme je od sebe oddělit tak, aby vzniklé poloroviny měly vlastnost ze zadání (když si vezmeme libovolný bod X z poloroviny, která obsahuje bod A, vzdálenost bodu X k A je menší než vzdálenost X k bodu B). Řešení této úlohy je snadné: Sestrojíme úsečku mezi body A a B a její osa je zároveň dělicí přímka výsledných polorovin. Řešení může vypadat podobně jako na obrázku vpravo.



Stejnou konstrukci využijeme i při řešení původní úlohy. Nory si nejprve označíme písmeny A až E. Jistě bychom mohli všechny dvojice bodů spojit úsečkou, sestrojit její kolmici, a tak najít dělení pozemku, ale chtěl bych vidět někoho, kdo by se ve výsledné čmáranici vyznal. Půjdeme na to tedy jinak: Nejprve narýsujeme trojúhelník ABC a sestrojíme osy stran. Hranice pozemku s norou B se už asi nebude měnit, ostatní body jsou položeny tak, že žádná osa spojnice dvou bodů nezmění jeho hranice. Zbylé pozemky ale kompletní nejsou. V dalším kroku narýsujeme trojúhelník ACE a i jemu sestrojíme osy stran. ACE a ABC mají společnou stranu AC, takže její osu už máme (mimochodem osa této úsečky zároveň spojuje průsečíky os stran trojúhelníků ABC a ACE). Vidíme, že pozemek kolem nory A bude také hotový, jeho hranice je tvořena osami úseček AB, AC a AE. V dalším kroku sestrojíme osy stran trojúhelníku CDE a dělení louky je hotovo. Ještě ověříme, zda osa úsečky BD nějak nezmění pozemky kolem nor B a D. Naštěstí nikoli, průsečík os stran trojúhelníku BCD leží mimo obrázek a nemůže řešení nijak ovlivnit. Další dvojice bodů už nemá cenu zkoušet a výsledné dělení louky je znázorněno na následujícím obrázku:





Obrázek 7 Druhý způsob dělení

Pokud se zvířátka rozhodnou pro druhý způsob dělení, bude na každém pozemku právě jeden strom. První způsob dělení nic takového nezaručí (okolo nory C nebude žádný strom, zatímco obyvatel nory E bude mít na pozemku stromy dva).