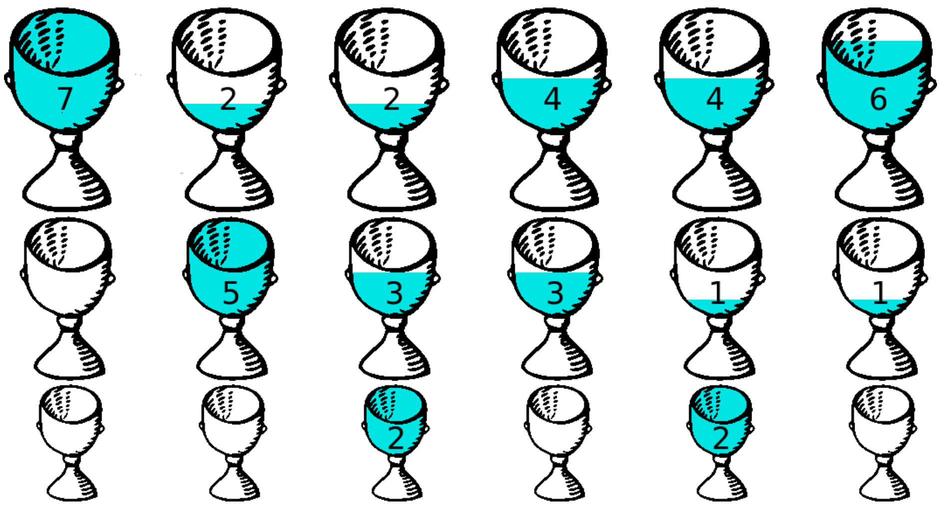
Kategorie mladší

Úloha 1A (5 bodů):

Jako první využijeme Žofinčin postřeh. Díky němu se nám totiž celá úloha podstatně zjednoduší. Žofinka říká, ať nehledáme 6 nezávislých cifer, ale pouze 3. Poznávací značku si tak můžeme představit jako číslo ve tvaru $abccba$ (a, b i c jsou jednotlivé cifry). Další zjednodušení vyplývá z Pufíkovy informace: třetí cifra je dvakrát větší než šestá. To znamená, že máme jen 5 možností, jak doplnit cifry za písmenka a a c:
$0b00b0$
$1b22b1$
$2b44b2$
$3b66b3$
$4b88b4$
Cifru na druhé (a páté) pozici zatím neznáme, a proto ji stále značíme písmenkem b. Jaká by mohla být? Od Ferdy víme, že je lichá. Z Pufíkovy nápovědy navíc vyplývá, že je menší než třetí cifra (protože druhá cifra není největší ze všech). Kombinaci $0b00b0$ tedy můžeme vyloučit, za b bychom museli dosazovat 0 a to není liché číslo. Při zkoumání zbývajících 4 kombinací využijeme informaci od Píďi. Jak se pozná číslo dělitelné devíti? Po krátkém zápase si každý jistě vzpomene, že ciferný součet takového čísla je také dělitelný devíti. Za b musíme dosazovat jen takové cifry, aby byl ciferný součet roven 18 nebo 36 (9 ani 27 to být nemůže, každá cifra se v poznávací značce dvakrát opakuje, takže jejich součet musí být sudý). Všechny želví postřehy jsme již využili, takže nezbývá než vzít zbylé 4 kombinace a dosazovat za b tak, aby byl ciferný součet 18 nebo 36:
162261, 1+6+2+2+6+2=18, ale druhá cifra není lichá a je největší, nevyhovuje.
234432, 2+3+4+4+3+2=18, druhá cifra je lichá a není největší, také ostatní pravidla jsou splněna a číslo **vyhovuje**.
Pro zajímavost ještě prozkoumáme ostatní kombinace:
306603, 3+0+6+6+0+3=18, ale druhá cifra není lichá.
396693, 3+9+6+6+9+3=36, ale druhá cifra je největší ze všech.
468864, 4+6+8+8+6+4=36, ale druhá cifra není lichá.
Tím jsme vyčerpali všechny možnosti a můžeme odpovědět, že poznávací značka zlého Trhače je 234432.

Úloha 2A (6 bodů):

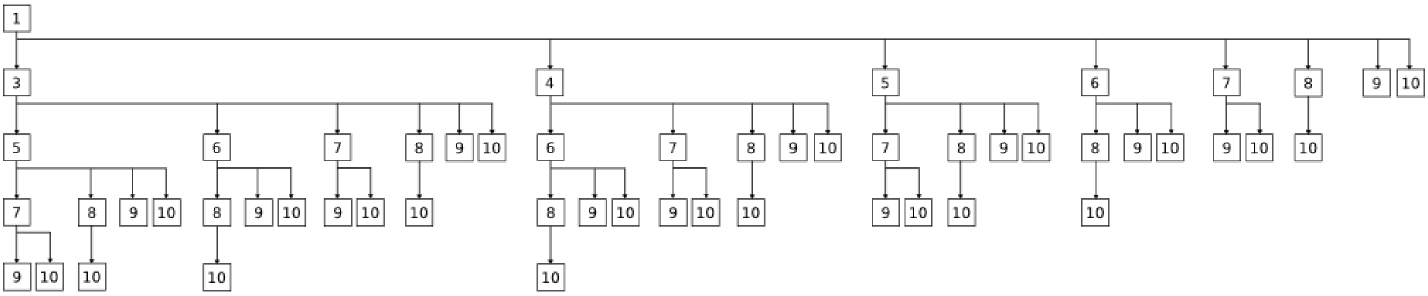
Oslík Jindřich smí s mlékem provést jen dvě věci, naplnit některou z nádobek a přelít obsah nádobky do jiné. Nesmí však již jednou nabrané mléko do sudu vracet, protože by se pak mohlo zkazit a ani ho nesmí vylévat někam na zem, za takové plýtvání by ho král nepochválil. Musí tedy nabrat přesně tolik mléka, kolik potřebuje. V receptu se píše o šesti a jednom žejdlíku. Jindřich tedy vezme sedmi žejdlíkovou nádobku a naplní ji mlékem ze sudu. Z ní přelije mléko do pěti žejdlíkové a získá tak dva a pět žejdlíků. Z pěti žejdlíkové nádobky přelije mléko do dvou žejdlíkové, tím dostane tři a dva žejdlíky. Dva žejdlíky vrátí zpátky do největší nádoby, kde tak získá čtyři žejdlíky. V pěti žejdlíkové jsou stále žejdlíky tři a poslední nádobka je nyní prázdná. Mléko z pěti žejdlíkové přelije do prázdné dvou žejdlíkové, čímž mu v pěti žejdlíkové zůstane jeden žejdlík. Přelitím obsahu dvou žejdlíkové nádobky ke čtyřem žejdlíkům ve velké získá oslík šest žejdlíků a může začít vařit. Celý postup je nakreslen na následujícím obrázku:



Obrázek 1 Přelévání mléka

Úloha 3A (7 bodů):

Úlohu bylo možné řešit několika způsoby. První z nich je velmi prostý: nakreslíme si data narození všech párů králíků. Výsledek bude vypadat podobně jako na následujícím obrázku:



Obrázek 2 Diagram rozmnožování králíků

Každý čtvereček představuje měsíc, ve kterém se daný pár narodil (v případě prvního páru znamená jednička měsíc, ve kterém byl pár koupen), a všechny šipky vedou od rodičů k potomkům. Původní pár králíků (čtvereček úplně vlevo nahoře) má tedy potomky třetí měsíc a pak každý další (jeho potomci tvoří druhý řádek diagramu). Mezitím budou samozřejmě mít mladé i nově narození králíci. Např. pár, který se narodil původním králíkům ve třetím měsíci, bude mít potomky v pátém měsíci a zase v každém dalším. Tímto způsobem pokračujeme tak dlouho, dokud nevypíšeme všechny páry králíků, které se narodí do desátého měsíce. Na konci stačí sečíst všechny nakreslené čtverečky a vyjde nám 55 párů, tedy 110 králíků. Sami ale vidíte, že tento postup je velmi zdlouhavý a pokud nejsme pečliví, snadno se v obrázku ztratíme a nikdy se nedostaneme ke správnému výsledku.

Druhý způsob spočívá v jednoduché úvaze. Každý měsíc máme tolik párů, kolik jsme jich měli minulý měsíc a navíc se jich narodí tolik, kolik jsme jich měli měsíc předminulý. Každý pár, který je alespoň dva měsíce starý, totiž porodí nový pár králíků. Podle zadání jsme měli první měsíc jeden pár a druhý měsíc také. Ve třetím měsíci tedy sečteme počty za předchozí dva měsíce a vyjdou nám dva páry. Čtvrtý měsíc sečteme 1 a 2 a dostaneme 3 páry. Takto pokračujeme a vyjde nám řada čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 a 55. Dostali jsme se ke stejnému výsledku jako v předchozím odstavci a ani jsme se moc nenadřeli. Navíc, kdybychom z nějakého důvodu chtěli znát počet králíků po třiceti měsících, stačí pokračovat ve sčítání a zakrátko vyřešíme i tuto úlohu.

Úloha 4A (9 bodů):

Úloha má dvě části: nejprve musíme vybarvit mřížku a pak z ní přečíst datum, kdy se prodávají semínka té záhadné plodiny. Vybarvování políček mřížky ukážeme jen pro první řádek, ale u ostatních se postupuje úplně stejně. Prvnímu řádku přísluší číslo 81, takže začneme s jeho dělením dvěma:

$81/2 = 40$, zbytek 1, a tak první políčko (v pravém horním rohu mřížky) obarvíme na černo.

$40/2 = 20$, zbytek 0, druhé políčko zprava necháme prázdné.

$20/2 = 10$, zbytek 0, třetí políčko necháme prázdné.

$10/2 = 5$, zbytek 0, i čtvrté políčko necháme prázdné.

$5/2 = 2$, zbytek 1, páté políčko označíme.

$2/2 = 1$, zbytek 0, šesté políčko necháme prázdné.

$1/2 = 0$, zbytek 1, označíme sedmé políčko zprava.

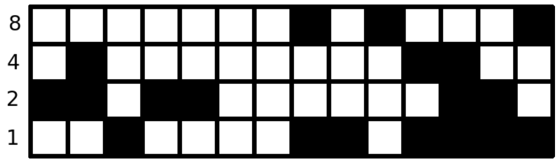
Dál už nemá smysl v dělení pokračovat, a tak ostatní políčka v prvním řádku necháme prázdná. Stejně budeme postupovat i u zbylých čísel (v závorce jsou zbytky po dělení 2):

Druhý řádek: $4108/2 = 2054$ (**0**), $2054/2 = 1027$ (**0**), $1027/2 = 513$ (**1**), $513/2 = 256$ (**1**), $256/2 = 128$ (**0**), $128/2 = 64$ (**0**), $64/2 = 32$ (**0**), $32/2 = 16$ (**0**), $16/2 = 8$ (**0**), $8/2 = 4$ (**0**), $4/2 = 2$ (**0**), $2/2 = 1$ (**0**), $1/2 = 0$ (**1**)

Třetí řádek: $13830/2 = 6915$ (**0**), $6915/2 = 3457$ (**1**), $3457/2 = 1728$ (**1**), $1728/2 = 864$ (**0**), $864/2 = 432$ (**0**), $432/2 = 216$ (**0**), $216/2 = 108$ (**0**), $108/2 = 54$ (**0**), $54/2 = 27$ (**0**), $27/2 = 13$ (**1**), $13/2 = 6$ (**1**), $6/2 = 3$ (**0**), $3/2 = 1$ (**1**), $1/2 = 0$ (**1**)

Čtvrtý řádek: $2159/2 = 1079$ (**1**), $1079/2 = 539$ (**1**), $539/2 = 269$ (**1**), $269/2 = 134$ (**1**), $134/2 = 67$ (**0**), $67/2 = 33$ (**1**), $33/2 = 16$ (**1**), $16/2 = 8$ (**0**), $8/2 = 4$ (**0**), $4/2 = 2$ (**0**), $2/2 = 1$ (**0**), $1/2 = 0$ (**1**)

Nakonec dostaneme takto vymalovanou mřížku:

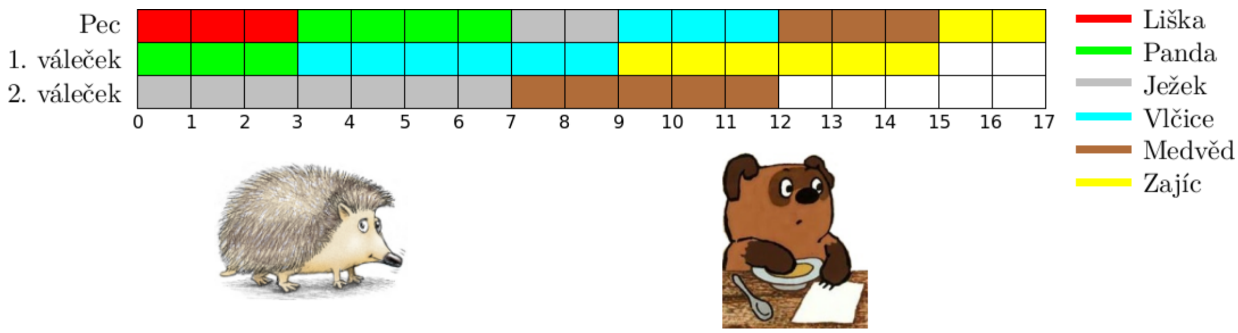


Obrázek 3 Vymalovaná mřížka

V dalším kroku přečteme z mřížky datum a čas. Není v tom žádná věda, prostě budeme postupovat podle zadání a v každém sloupci sečteme čísla na kraji mřížky, která přísluší vybarveným políčkám. V prvním sloupci je vybarvené pouze třetí políčko zhora, takže tady ani nemusíme nic sčítat a pouze si pod první sloupec zapíšeme číslo 2. Ve druhém sloupci jsou vymalovaná políčka ve druhém a třetím řádku, $2 + 4 = 6$ a pod druhý sloupec si tak poznamenáme číslo 6. A tak dále až nakonec pod mřížkou přečteme číslo 26122009185739. Po krátkém přemýšlení (ale opravdu krátkém) je hledané datum a čas 26.12.2009 18:57:39.

Úloha 5A (5 bodů):

Zvířátka používají dva nástroje, válečky a pec. Aby měla napečeno co nejdříve, musí se u obou střídat s co možná nejmenšími přestávkami. Je asi jasné, že kdyby pec nejdříve pekla 2 hodiny, pak 5 hodin chladla, pak zase pekla 3 hodiny a zase 5 hodin chladla, zbytečně bychom plýtvali drahocenným zvířecím časem. Která zvířátka by ale měla začít s válením těsta a kdy se začne péct v peci? Všimněme si, že až na lišku musí všechna zvířátka těsto nejprve uválet. Jako první tedy bude péct liška. Až bude mít hotovo, určitě nechceme, aby pec příliš dlouho chladla. Jediný, kdo může péct ihned po lišce, je panda, takže pandě svěříme na tři hodiny první váleček a potom na čtyři hodiny pec. Ani pak nechceme nechat pec nevyužitou. Jediný způsob jak toho dosáhnout, je nechat ježka sedm hodin pracovat s druhým válečkem a pak ho hned pustit k peci. Nyní máme dvě možnosti jak zařídit, aby i teď pec pekla bez přestávky. První váleček můžeme na šest hodin svěřit zajíci nebo vlčici. Kdybychom se rozhodli pro zajíce, byla by pec po jeho odchodu chvíli nevyužitá, takže první váleček půjčíme vlčici a bude to právě ona, kdo bude péct po ježkovi. Jakmile ježek skončí s válením těsta, chopí se druhého válečku medvěd a až bude hotov, může hned u pece vystřídat vlčici. Nakonec se dočká i zajíc. Převezme po vlčici první váleček a hned poté může začít péct. Vše je přehledně nakresleno na následujícím obrázku:

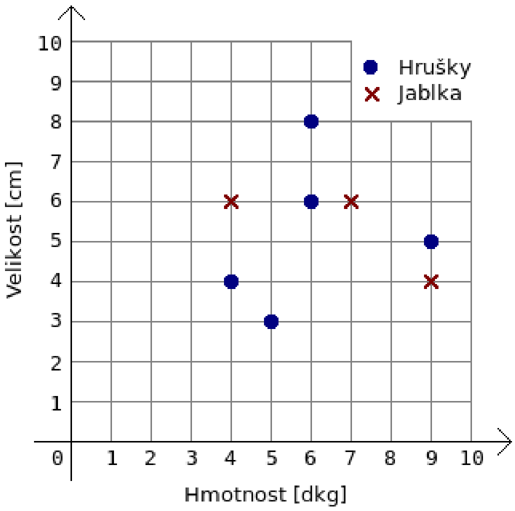


Obrázek 4 Pořadí zvířátek

Zvířátka budou mít napečeno za 17 hodin.

Kategorie starší

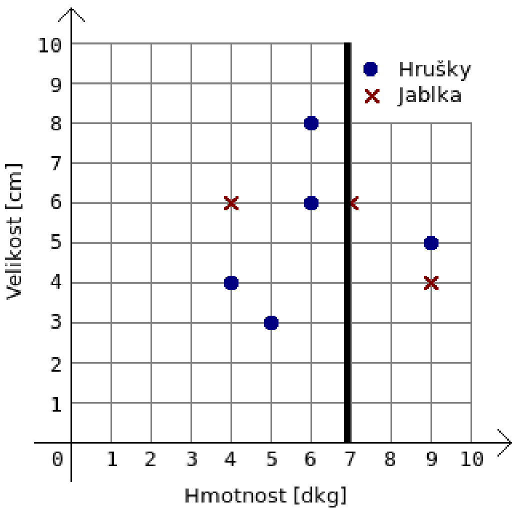
Úloha 1B (5 bodů):
Předtím, než začneme cokoli řešit, vykreslíme si do grafu ovoce, které Petr vybral. Na ose x budeme vynášet hmotnost v dekagramech, na ose y velikost ovoce v centimetrech a hrušky budeme značit modrým kolečkem a jablka červeným křížkem:



Obrázek 5 Vybraná jablka a hrušky

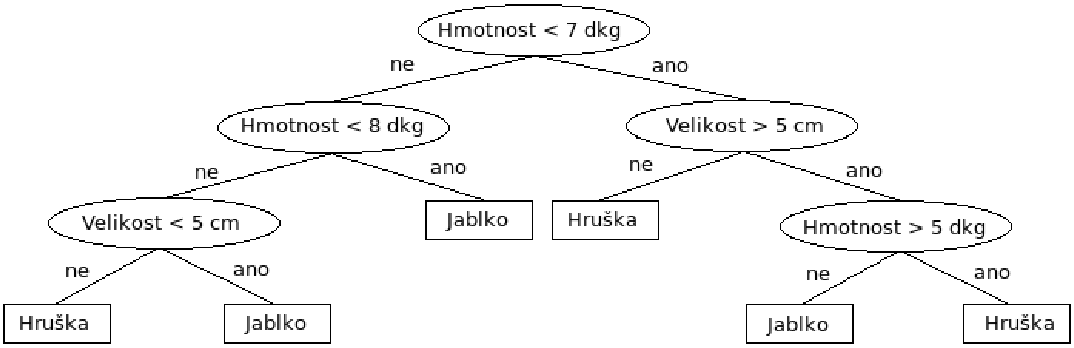
Celá úloha je nyní mnohem názornější. Jednotlivé bloky si totiž můžeme představit jako svislé nebo vodorovné přímky, které v grafu dělí ovoce na dvě hromádky. Nastavme např. první blok sítě tak, aby měřil hmotnost a ptal se, zda je naměřená hodnota menší než 7:

Takový blok si můžeme představit jako svislou přímku, která dělí ovoce podle hmotnosti:



Obrázek 6 1 rozhodovací blok

Volba prvního bloku sítě ve skutečnosti nebyla náhodná. Kdybychom totiž ve tvorbě rozhodovací sítě dále nepokračovali a prohlásili, že všechno ovoce lehčí než 7 dkg jsou hrušky, dopustili bychom se pouze dvou chyb (jablko 4 dkg a 6 cm bychom považovali za hrušku a naopak hrušku 9 dkg a 5 cm za jablko). Samozřejmě jsme mohli první blok nastavit i jinak, ale takhle se k dokonale fungující síti dostaneme poměrně rychle. Stačí jen ošetřit právě tyto dva kousky ovoce. Hotový klasifikátor by mohl vypadat podobně jako na následujícím obrázku:

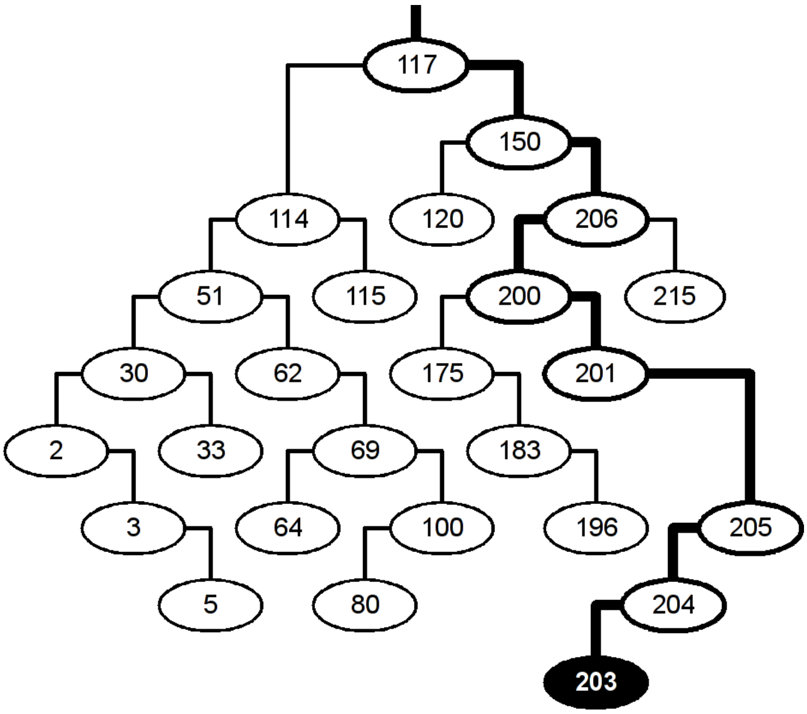


Obrázek 7 Rozhodovací síť

Pokud by Karel narazil na kousek ovoce, který váží 5 dkg a měří 5 cm, postupoval by podle sítě na obrázku 7 nějak takto: je tento kousek lehčí než 7 dkg? Zjistil by že ano a posunul se o úroveň níž na další blok. Je větší než 5 cm? Není (5 není větší než 5) a Karel by tento kousek ovoce zařadil mezi hrušky. Samozřejmě, kdybychom sestavili síť jinak, mohlo by se stát, že se Karel rozhodne pro jablko. Cílem této podotázky nebylo, abyste všichni odpověděli „hruška“, ale abyste předvedli, že umíte svoji rozhodovací síť používat.

Úloha 2B (6 bodů):

Tato úloha má dvě části: nejprve musíme správně rozvěsit zvonečky a potom podle tvaru a počtu lístků vybrat ten správný. Zvonečky budeme věšet podle pořadí, ve kterém je vytáhneme z krabičky. První je zvonek 117. Po něm následuje zvonek s číslem 114: 114 je menší než 117, takže jej zavěsíme nalevo. Další je zvonek 51. Číslo 51 je menší než 117, ale nalevo už visí zvonek 114. Nicméně 51 je také menší než 114, a tak tento zvonek pověsíme nalevo od 114. Potom vytáhneme 30. Ten je menší než 117, 114 i 51, takže jej zavěsíme na levý háček zvonku 51. A tak pokračujeme dál, až nám vznikne útvar jako na obrázku 8:



Obrázek 8 Rozvěšené zvonečky

Jakmile máme všechny zvonky rozvěšené, můžeme vybrat ten správný. Při hledání budeme postupovat podle pravidel: rostlina má lístky v pořadí 2 kulaté, 1 hranatý, 2 kulaté a 2 hranaté a kulatý lístek znamená při hledání posun doprava, zatímco hranatý doleva. Začneme u zvonku 117 a postupujeme podle pořadí a tvaru lístků. Nejprve se tedy vydáme dvakrát doprava (2 kulaté lístky) na zvoneček 150 a pak 206. Následuje hranatý lístek, a tak ze zvonku 206 postoupíme doleva na 200. Potom půjdeme dvakrát doprava na zvonky 201 a 205 a nakonec zase dvakrát doleva (204 a 203). Žádné další lístky už nezbývají, takže Miloš vezme zvonek číslo 203 a může bazalkám zvonit jedna radost.

Úloha 3B (7 bodů):
V této úloze bylo nejdůležitější pochopit, jak funguje operátor ∂, vše ostatní pak už bylo jednoduché. Zopakujme si pravidla, podle kterých budeme postupovat:

$$\partial(x^n) = nx^{n-1} \tag{1}$$

$$\partial(mx^n) = mnx^{n-1} \tag{2}$$

$$\partial(\text{něco libovolného} + \text{něco dalšího}) = \partial(\text{něco libovolného}) + \partial(\text{něco dalšího}) \tag{3}$$

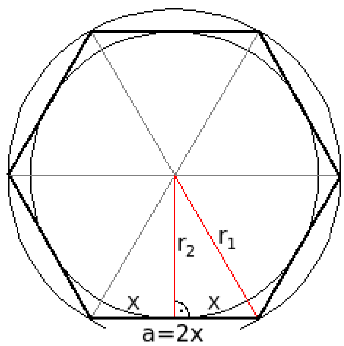
Takže když třeba chceme spočítat $\partial\left(x^5\right)$, použijeme pravidlo (1) a výsledek bude $5x^4$. A když chceme spočítat $\partial\left(5x^4\right)$, bude výsledek podle druhého pravidla roven $20x^3$. Jistě jste si všimli, že jsme právě zjednodušili prostřední člen výrazu, který na Vás liška Eliška připravila. Třetí pravidlo nám říká, že výraz $\partial(x^4 + \partial(\partial(x^5) + x^2))$ můžeme přepsat na $\partial(x^4) + \partial(\partial(\partial(x^5) + x^2))$ nebo také na tvar $\partial(x^4 + \partial(\partial(x^5))) + \partial(x^2)$. Vidíte, že máme hned několik možností, jak začít. Tak třeba od prostředka (od členu $\partial(\partial(x^5))$):

$$\begin{aligned}
\partial(x^4 + \partial(\partial(x^5) + x^2)) + x &= && /\text{pravidlo } (1)/ \\
= \partial(x^4 + \partial(5x^4 + x^2)) + x &= && /(3)/ \\
= \partial(x^4 + \partial(5x^4) + \partial(x^2)) + x &= && /(2), (1)/ \\
= \partial(x^4 + 20x^3 + 2x) + x &= && /(3), (3)/ \\
= \partial(x^4) + \partial(20x^3) + \partial(2x) + x &= && /(1), (2), (2)/ \\
= 4x^3 + 60x^2 + 2 + x & &&
\end{aligned} \tag{4}$$

Po dosazení $x = 2$ je výsledek příkladu

$$4x^3 + 60x^2 + 2 + x = 4 * 8 + 60 * 4 + 2 + 2 = 276 \tag{5}$$

Úloha 4B (9 bodů):
V podobných úlohách bývá nejlepší nakreslit si obrázek. Nebudeme ale kreslit celý 72-úhelník, stejně by byl nerozeznatelný od kružnice (kdo nevěří, ať si to doma zkusí). Namísto toho si úlohu přiblížíme na jednodušším mnohoúhelníku, řekněme třeba na šestiúhelníkové ohradě na obrázku vpravo. Červeně jsou vyznačeny známé údaje. Kdybychom navrhovali ohradu ve tvaru šestiúhelníka, stačilo by pomocí pythagorovy věty vypočítat x, pak stranu a a nakonec celý obvod. Nešlo by této úvahy využít i pro původní úlohu se 72-úhelníkem? Jistě tušíte, že ano, jinak bych se takhle hloupě neptal. Stejně jako šestiúhelník totiž můžeme 72-úhelník poskládat z rovnoramenných trojúhelníků (šestiúhelník je tvořen dokonce trojúhelníky rovnostrannými, ale tím se nyní nemusíme trápit). Kdybychom si přecijen 72-úhelník s vepsanou a opsanou kružnicí nakreslili, výsledek by vlastně vypadal velmi podobně jako na obrázku, jen by tam těch trojúhelníčků nebylo 6, ale 72. Opět bychom si v jednom trojúhelníku označili známé údaje a opět bychom zjistili, že známe výšku a délku ramen. Takže na výpočtu strany a se nic nemění a můžeme ji spočítat pomocí Pythagorovy věty:



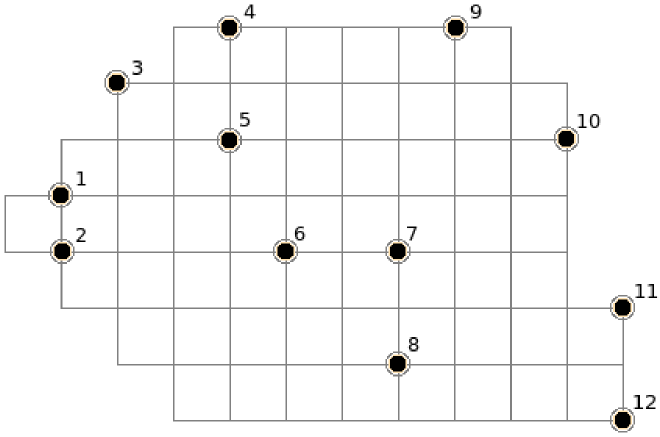
$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{r_1^2 - r_2^2} \\
x &= \sqrt{100^2 - 99,9^2}\ \text{m} = 4,47\ \text{m} \\
a &= 2x \\
a &= 8,94\ \text{m}
\end{aligned} \tag{6}$$

Tím jsme spočítali délku strany jednoho trojúhelníčka. Pravidelný 72-úhelník jich má 72, takže jeho obvod a zároveň délka pletiva, které musí Bára koupit, je rovna

$$\begin{aligned}
o &= 72a \\
o &\doteq 644\ \text{m}
\end{aligned} \tag{7}$$

Někteří z Vás zaokrouhlili délku strany na $a = 9$ m. Sice to není úplně v pořádku (zaokrouhlovat by se měl až konečný výsledek a ne mezivýpočty), Bára nakoupí zbytečné 4 metry pletiva, ale také to není úplně špatně (horší by bylo, kdyby se jí 4 metry nedostávaly), takže jsme žádné body za takové řešení nestrhávali.

Úloha 5B (5 bodů):
Aby se nám lépe popisoval postup řešení, města si očíslujeme (jejich pravá pohádková jména jsou příliš komplikovaná).

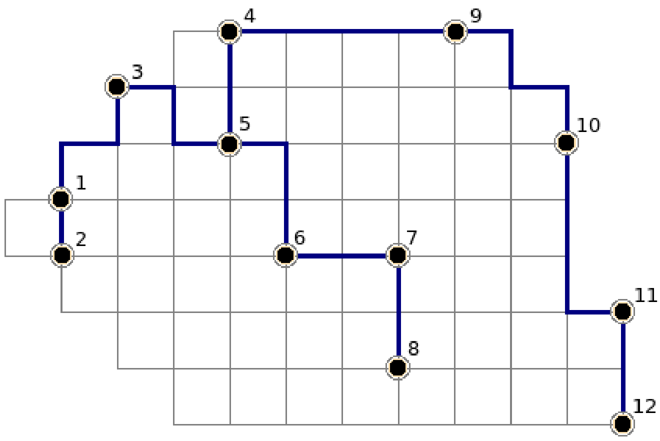


Obrázek 9 Království Făgăraş

Nechceme-li stavět průplavy mezi městy náhodně, existuje několik možností, jak postupovat. Všechny mají společný princip. Když si můžeme vybrat kudy mezi dvěma městy (nebo skupinou měst) postavit průplav, vybereme si tu nejkratší možnost. My budeme postupovat takto:

1. Nejprve si vybereme libovolné město, ze kterého začneme s výstavbou, a spojíme ho s nejbližším sousedem.
2. Vezmeme dosud propojená města, najdeme k nim nejbližšího souseda, do kterého zatím nevede průplav, a toto město připojíme nejkratším možným způsobem (podrobné vysvětlení na příkladu je v následujícím textu).
3. Jestliže stále zbývají nedostupná města, pokračujeme krokem **2**, jinak stavbu průplavů ukončíme.

Začněme třeba ve městě 2. Nejbližší město je 1, takže je obě propojíme průplavem (krok **1**). Jaké je nyní nejbližší město k dosud propojenému celku? Město 6 je 40 km daleko (vzdálenost mezi 2 a 6), 5 je také 40 km daleko (vzdálenost mezi 1 a 5), 3 je 30 km daleko (vzdálenost mezi 1 a 3), takže města 3 a 1 propojíme průplavem (krok **2**). Protože jsou v mapě stále nedostupná města, pokračujeme opět krokem **2**. Tentokrát si můžeme vybrat, z 3 do 4 je to 30 km a vzdálenost z 3 do 5 je také 30 km. Vybereme si třeba druhou možnost a spojíme města 3 a 5 průplavem (kdybychom si vybrali 4, nic by se nestalo, jen bych musel nakreslit nový ilustrační obrázek). A pokračujeme dále: Máme propojená města 1, 2, 3, 5 a nejblíže k tomuto celku je město 4. Takže do něj postavíme průplav (z města 5 je to jen 20 km). Pak z 5 postavíme průplav do 6, dále připojíme 7, atd. atd. Výsledek našeho snažení je na následujícím obrázku:



Obrázek 10 Výsledná komunikační síť

Celková délka komunikační sítě je 300 km. A i když to z předchozího popisu není vidět, je i nejkratší možná (a to není náhoda, když budeme postupovat podle kroků **1**, **2** a **3**, dostaneme nejkratší síť na libovolné mapě). Průplavy samozřejmě mohou vést trochu jinudy, ale jejich celková délka nikdy nemůže být menší než 300 km.