Kategorie mladší

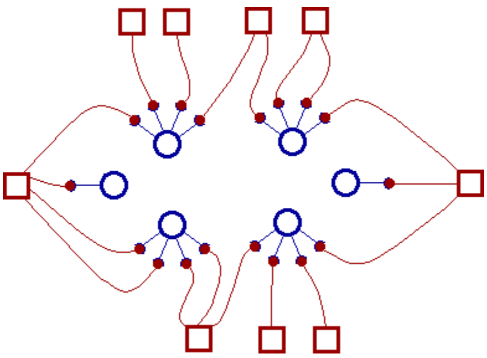
Úloha 1A (5 bodů):
Pepa sice rozbil pyramidu důkladně, ale naštěstí pro mravence v ní nechal dvě místa, odkud lze sloupy stavět bez hádání a zkoušení. První je ve třetím řádku první políčko zleva a druhé ve čtvrtém řádku třetí políčko zleva. Z trojice sloupů zde chybí vždy jen jediný. Mravenci si tedy mohou vybrat, odkud začnou s rekonstrukcí. Vyberme za ně např. třetí políčko ve čtvrtém řádku:

_
_ _
_ D _
B D D _
_ _ _ M _
_ _ M _ _ _
_ D _ _ _ _ M

Nyní můžeme jednoznačně doplnit sloupy na dvě místa: první políčko ve třetím řádku nebo na třetí políčko v pátém řádku. A tak dále a tak dále. Kompletně opravená pyramida pak vypadá takto:

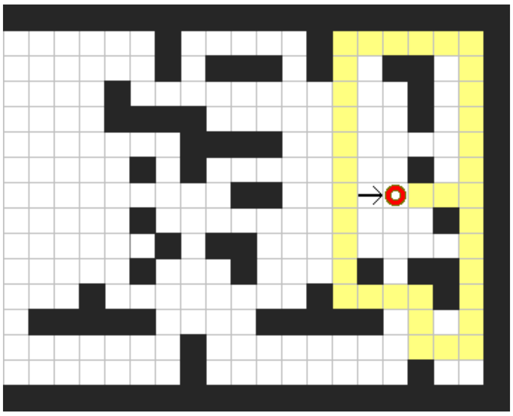
M
B O
B D O
B D D O
M M O M B
M D M B O O
M D D M M B M

Úloha 2A (6 bodů):
Tato úloha byla pro Vás nakonec lehčí než jsme předpokládali. Jedním z možných postupů bylo umístit kulaté díly doprostřed a hranaté okolo nich:

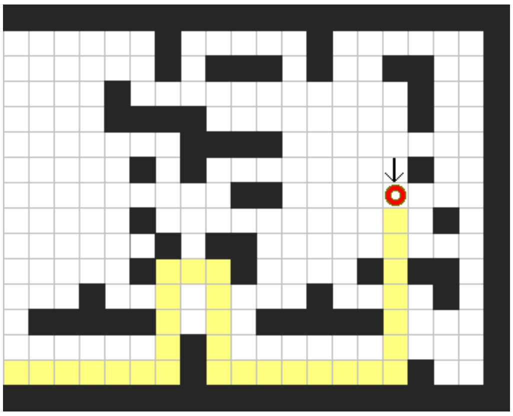


Pravda, je to trochu neobvyklá síť pro pavouka, ale zadání splňuje :-) Samozřejmě jsme uznávali jakékoli řešení, které vyhovovalo zadání.

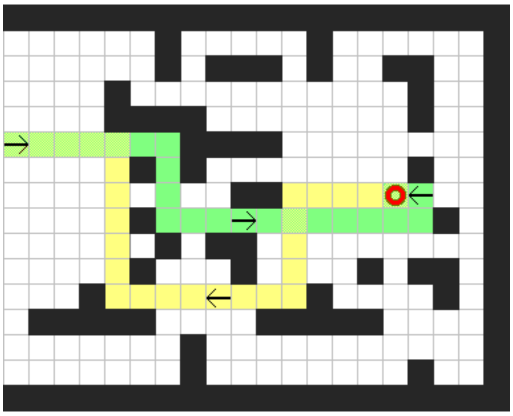
Úloha 3A (7 bodů):
První myšlenka, která Pipku napadla, bylo vyzkoušet všechna políčka na okraji hřiště, až najde to správné. Jenže co když takové políčko vůbec neexistuje? Co kdyby nemělo hřiště 14 políček na výšku, ale třeba 140? To by Pipku asi moc nebavilo. Pipka však ví, že pokud chce Karel vzít prsten, musí přes něj přejít. Jeho cestu tak nemusí plánovat od kraje, ale od prstenu. Pak nezáleží na velikosti hřiště, vždy stačí vyzkoušet čtyři možné cesty. Předpokládejme např., že Karel přijde k prstenu zleva:



Tudy cesta nevede, Karel by se už nikdy nedostal z bludiště. Zkusíme dále prozkoumat možnost, že by Karel přišel ze zhora:



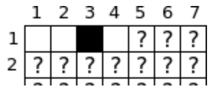
To už je nadějnější, Karel by se dokázal dostat ven. Když ho ale zkusíme vypustit z políčka ve 14. řádku, nevrátí se zpět na to samé místo (skončí v prvním řádku), a proto ani tato možnost nevyhovuje zadání. Správné řešení zjistíme, když Karla necháme přijít k prstenu zprava:



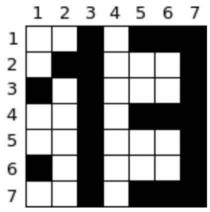
Zelenou barvou je značena cesta k prstenu a žlutou cesta zpátky. Pipka musí vypustit Karla z políčka na pátém řádku.

Úloha 4A (9 bodů):

V této úloze bylo nejdůležitější dokonale pochopit, jak určit barvu čtverečku v rozkódovaném obrázku. V zadání se to sice nikde nezmiňuje, ale i 0 je sudé číslo. Takže když někam přiložíme kódovací klíč a napočítáme 0 bílých a 1 černé překrytí, bude výsledný čtvereček bílý, protože 0 je sudé číslo. Jakmile pochopíme i zbytek, můžeme se vesele pustit do dekódování. Asi je vhodné nezkoušet čtverečky v náhodném pořadí, ale začít třeba v levém horním rohu. Když přiložíme kódovací klíč na čtvereček v prvním sloupci a prvním řádku, napočítáme 2 bílá a 1 černé překrytí. Podle pravidel ze zadání tak bude tento čtvereček ve výsledném obrázku bílý. Pak třeba posuneme klíč o jedno políčko doprava. Tady napočítáme 2 bílá a 3 černá překrytí a čtvereček bude také bílý. Posuneme klíč opět o jedno pole doprava a tady už napočítáme 1 bílé a 2 černá překrytí a tento čtvereček bude černý. Znovu posuneme klíč o jedno pole doprava, napočítáme 0 bílých a 3 černé překrytí a obarvíme čtvereček na bílo. Zatím jsme rozkódovali 4 čtverečky:



Je nejvyšší čas zbystřit. Možná jsme narazili na čtvereček, který nemá společný roh s žádným jiným černým čtverečkem, ale také jsme mohli narazit na část číslice. Jaká by to mohla být? Pouze 1, 2 nebo 4. Pokud jsme skutečně narazili na jednu z těchto číslic, musí být čtvereček ve druhém řádku a druhém sloupci černý. A skutečně, když na něj přiložíme klíč, napočítáme 2 černá a 2 bílá překrytí, takže ponecháme čtverečku stejnou barvu, jakou měl v původním obrázku (černou). Zkusíme určit, o kterou číslici se jedná. Kdybychom narazili na 2, musel by mít čtvereček ve druhém řádku a třetím sloupci bílou barvu. Když na něj ale přiložíme klíč, napočítáme 2 černá a 1 bílé pokrytí a musíme čtvereček nabarvit na černo. Tím jsme vyloučili číslici 2 a zbývá se rozhodnout mezi 1 a 4. Stačí např. rozkódovat čtvereček v pátém řádku a prvním sloupci. Protože bude mít bílou barvou, našli jsme v obrázku cifru 1. Podobně odhalíme i druhou cifru a nakonec zjistíme, že na obrázku je číslo 13. Najít onen osamocený čtvereček už není vůbec složité, stačí rozkódovat čtverečky v prvním sloupci a pátém, šestém a sedmém řádku. Nakonec se objeví v šestém řádku:



Heslo magické truhlice je 13*1*6=78.

Úloha 5A (5 bodů):

Oněch 44 dní si můžeme rozdělit na dvě části: 6 týdnů a 2 dny. Ať se snaží Lev sebevíc, během 6-ti týdnů nebude moci 6*3=18 dní jezdit po pohádkovém království autem. Vůbec přitom nezáleží na tom, který den začne. Pokud chce tedy cestovat co nejdéle, musí zařídit, aby zbývající dva dny mohla jezdit auta (aby neplatila žádná omezení). Jediné dva po sobě následující volné dny jsou pátek a sobota. Lev s Leošem by tedy měli zakončit svůj výlet v sobotu a to znamená začít v pátek. Celkem procestují 44-18=26 dní.

Kategorie starší

Úloha 1B (5 bodů):

Číslo x sice neznáme, ale co můžeme říci o číslu, které bude v horní větvi o jedno políčko napravo? Bude to nějaké $x+2$. A jaké číslo bude o pole dál? Nějaké $\frac{x+2}{3}$. V dalším poli bude $\frac{x+2}{3}-3$ a namísto otazníku $\left(\frac{x+2}{3}-3\right)*2$. Zatím sice neumíme spočítat ani x ani ?, ale zkusíme obsah posledního pole vyjádřit pomocí dolní větve: $\left(\frac{x}{4}-3\right)*3+2$. Oba tyto výrazy se musí rovnat a číslo x spočítáme z následující rovnice:

$$\left(\frac{x+2}{3}-3\right)*2=\left(\frac{x}{4}-3\right)*3+2 \tag{1}$$

$$\frac{2(x-7)}{3}=3\frac{x-12}{4}+2 \tag{2}$$

$$8x-56=9x-108+24 \tag{3}$$

$$x=28 \tag{4}$$

Za x je třeba dosadit 28 a namísto otazníku bude číslo 14. Mnoho z Vás se ke stejnému výsledku dostalo přes požadavky na dělitelnost, avšak to není úplně správný postup. Nikde v zadání není řečeno, že x je celé nebo aspoň kladné číslo.

Úloha 2B (6 bodů):

Bára musí nejprve vypočítat délku strany jednoho černého trojúhelníčka. To není vůbec těžký úkol, vzorec pro obsah rovnostranného trojúhelníka je $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Když si ze vzorce vyjádříme stranu a a dosadíme, dostaneme

$$a=\sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} \tag{5}$$

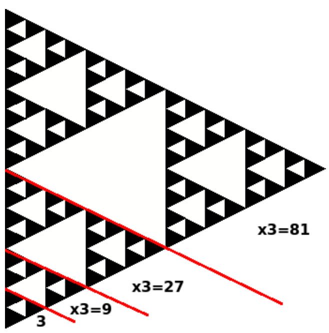
$$a=\sqrt{\frac{4*0,433}{\sqrt{3}}}\ \mathrm{m} \tag{6}$$

$$a\doteq 1\ \mathrm{m} \tag{7}$$

Obvod všech bílých trojúhelníků lze spočítat mnoha způsoby, některé jsou pomalejší, některé rychlejší. Povšimněme si ale jedné věci: ať už si vybereme jakýkoli bílý trojúhelník, vždy sousedí jen s černými trojúhelníky. Nikdy nemají dva bílé trojúhelníky společnou stranu. To znamená, že obvod všech černých a bílých spolu úzce souvisí:

$$\text{Součet obvodů bílých} = \text{Součet obvodů černých} - \text{Obvod největšího trojúhelníka} \tag{8}$$

Nemusíme se trápit s různě velkými bílými trojúhelníky a pracně sčítat jejich obvody. Stačí vypočítat obvod všech černých a odečíst obvod největšího trojúhelníka. I počet černých trojúhelníčků můžeme počítat různými způsoby, ale když využijeme pravidelností v plánku, nemusí to ani moc bolet:



V celém plánku je 81 černých trojúhelníčků. Délka strany nejdelšího trojúhelníka je 16 m. Teď už jen stačí dosadit do vzorečku (8)

$$\text{Součet obvodů bílých} = 3*1*81-3*16=195\ \mathrm{m} \tag{9}$$

a s klidným svědomím můžeme Báře poradit, ať koupí 195 m pletiva.

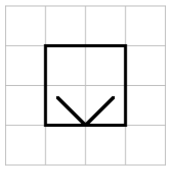
Úloha 3B (7 bodů):
Základem úspěchu je zapsat obrázek sovy Olgy pomocí povelů pro robotickou želvu:

− ↶ − ↶ ⊖ − ⊖ ⊖ ⊖ −

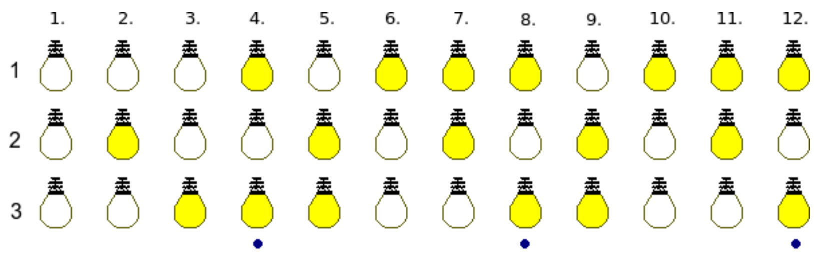
Tuto sekvenci několikrát přepíšeme podle pravidel v zadání. Aby bylo jasně patrné, jak byl nahrazen ten či onen znak, vypíšeme si sekvenci po prvním přepisu do tabulky:

−	↶	−	↶	⊖	−	⊖	⊖	⊖	−
	↷ −		↷ −		−	↶↷↶↷	↶↷↶↷		⊖

Když si odmyslíme tabulku, má sekvence po prvním přepisu tvar ↷− ↷− − ↶↷↶↷↶↷↶↷⊖
Po druhém přepisu: ↶− ↶− ↶↶− − ↶↶− − ↶↶− − ↶↶− ↶−
Po třetím přepisu: ↷− ↷− ↷↷− − ↷↷− − ↷↷− − ↷↷− ↷− ⊖
Po čtvrtém přepisu: ↶− ↶− ↶↶− − ↶↶− − ↶↶− − ↶↶− ↶−
Atd. Atd. Zdá se, že se sekvence nikdy neustálí, ale kdo si pořádně přečetl zadání, neprohloupil. Zvědové se totiž neptali, kdy se přestane měnit sekvence povelů pro robotickou želvu, ale obrázek, který nakreslí. A ten se přestane měnit po druhém přepisu. Želva bude nadále kreslit následující obrazec:



Úloha 4B (9 bodů):
Představme si, že se vždy o půlnoci odkudsi vynoří trpaslík Richard a přepíná žárovky ručně. Nejprve se podívá na vstup krabičky $\boxed{T_1}$. Vstupuje do ní elektrický signál? Nikoli, krabička $\boxed{T_1}$ bude mít zítra stejný stav, jako dnes (vypnuto). U krabičky $\boxed{T_2}$ je to trochu složitější. Richard se nejdříve podívá na vstup dolní krabičky $\boxed{+}$. Ani do jednoho vstupu neteče elektrický proud, a proto i na jejím výstupu žádný signál nebude. Pak se podívá na krabičku $\boxed{}\circ$. Do ní také signál nevstupuje, ale protože tato krabička signál obrací, na jejím výstupu se proud objeví. Nakonec prozkoumá, zda teče proud do druhé krabičky $\boxed{+}$. Z dolního vstupu nikoli, ale z horního ano a na jejím výstupu bude přítomen signál. O půlnoci z prvního na druhý den tedy teče do krabičky $\boxed{T_2}$ elektrický proud a Richard si poznamená, že ji musí přepnout ze stavu vypnuto do zapnuto. Nakonec zjistí, jak se bude chovat krabička $\boxed{T_3}$. Do té (podobně jako do $\boxed{T_1}$) elektrický proud neteče, a tak i příští den bude ve stavu vypnuto. Až nyní se Richard podívá do svého zápisníku a zapne žárovku 2. Druhý den tak bude svítit žárovka 2 a žárovky 1 a 3 budou vypnuté. Stejně bude postupovat každou následující půlnoc. Stavy žárovek ve dnech 1 až 12 nakreslil Richard přehledně do následujícího obrázku:



Pátý den budou svítit žárovky 2 a 3. Od čtvrtého dne mají stavy krabiček periodu 4, to znamená, že 4., 8., 12., 16., ... den svítí stejné žárovky. Kdybychom v této posloupnosti pokračovali, došli bychom až k číslu 100 (posloupnost obsahuje násobky 4 a 100 je také dělitelné čtyřmi). Odpověď na druhou otázku zní, stý den budou svítit žárovky 1 a 3.

Úloha 5B (5 bodů):
Přestože to není napsáno v zadání, považovali jsme nakonec za správné dva možné postupy. Pokud jste správně setřídili placky na méně než 8 výměn a neprovedli žádnou nedovolenou operaci (vlastně jediná povolená bylo nabrat n horních placek a obrátit jejich pořadí), ohodnotili jsme příklad plným počtem bodů. Jedno možné řešení (tomuto stačí jen 6 výměn):

42|56371

2456|371

65423|71

32|45671

234567|1

7654321|

1234567

Takový postup však vyžaduje zkoušení různých možností a záleží trochu i na štěstí. Nicméně existuje postup, který je použitelný na libovolný počet placek. Placky 4, 2, 5, 6, 3, 7 a 1 chceme setřídit od nejmenší po největší, to znamená, že největší placka (číslo) bude vespod. Najdeme tedy největší prvek a obrátíme sekvenci nad ním (4, 2, 5, 6, 3, 7, 1 → 7, 3, 6, 5, 2, 4, 1). Pak obrátíme celou sekvenci a tím dostaneme největší prvek na svoje místo a dále si ho nemusíme všímat (7, 3, 6, 5, 2, 4, 1 → 1, 4, 2, 5, 6, 3, 7). Nyní najdeme druhý největší prvek a stejným způsobem ho zařadíme na svoje místo (1, 4, 2, 5, 6, 3, 7 → 6, 5, 2, 4, 1, 3, 7 → 3, 1, 4, 2, 5, 6, 7). Dále najdeme třetí největší prvek, čtvrtý největší atd. Zadanou sekvenci lze takto seřadit na 8 výměn. To sice nesplňuje zadání, ale protože se jedná o obecný postup, hodnotili jsme i taková řešení plným počtem bodů.